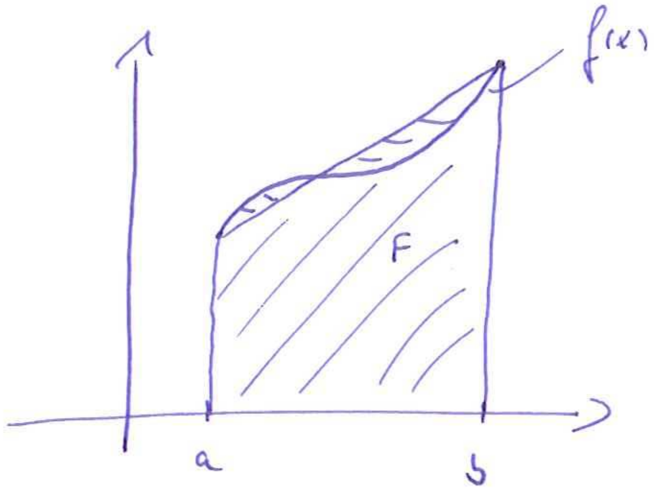
1. Das Riemann Integral (B. Riemann, 1826 - 1866, Nachf. Dirichlet in Göttingen)

1.1. Grundlagen

Integration: kommt von klass. Aufgabe der Inhaltsmessung.

Gesucht: „Fläche zwischen Graphen der Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und der x-Achse".



$$F = \int_a^b f(x)\,dx$$

Eine Unterteilung: $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

eines (beschränkten) Intervalls $J = [a, b]$ in Teilintervalle $J_k := [x_{k-1}, x_k]$ nennen wir eine endliche Zerlegung von J mit „Feinheit"

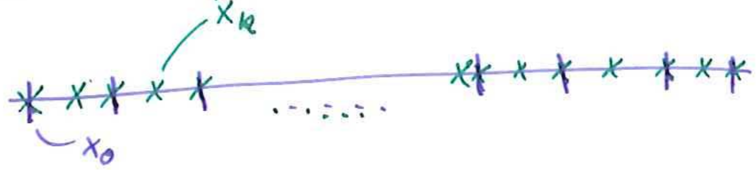
②

$$h := \max_{k=1,\dots,n} |x_k - x_{k-1}|\ .$$

Mit $\mathcal{Z}(a,b)$ bezeichnen wir die <u>Menge aller</u> Zerlegungen des Intervalls $I = [a,b]$.

Verfeinerung:

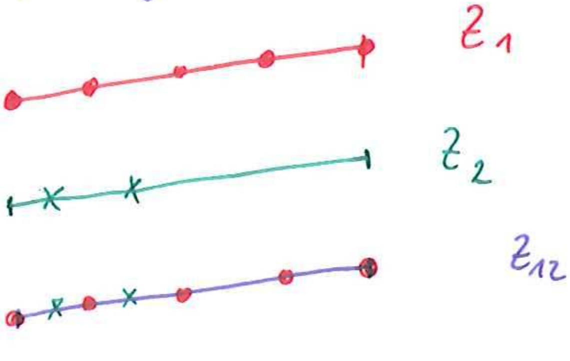
Z und $\tilde{Z}$



$\tilde{Z} = \{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_m\} \in \mathcal{Z}(a,b)$ ist eine Verfeinerung von Z, falls $\tilde{Z}$ die Punkte von Z und noch weitere enthält, insbesondere gilt

$$\tilde{h} = \max_{k=1,\dots,m} (\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}) \le h.$$

Gemeinsame Verfeinerung:

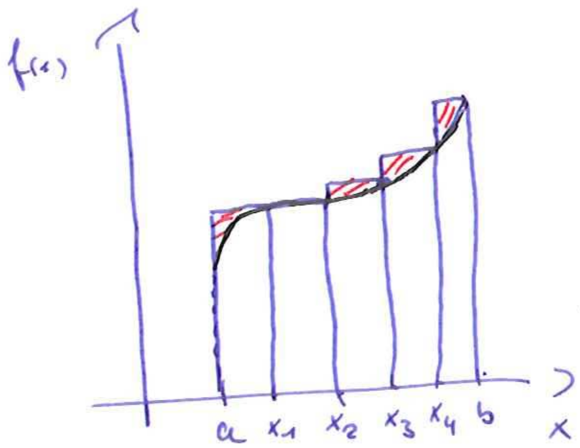


③

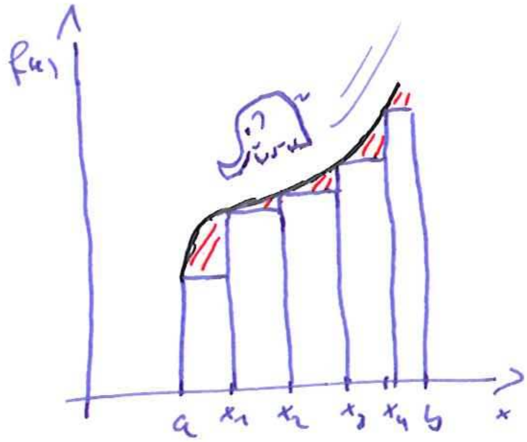
Äquidistanz: „Abstände zwischen den x_i s sind gleich."

Formel: $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ - äquidistant $\Leftrightarrow |x_k - x_{k-1}| = h \quad \forall k = 1, \dots, n$

Genug zerlegt, nun wird summiert:



(a)



(b)

Wie schreibt man nun (a) und (b) formal richtig auf?

Obersumme:

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in \mathfrak{Z}_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

Untersumme

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in \mathfrak{Z}_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

Zum Integral kommen wir nun, wenn ~~...~~ die roten Stellen in der Zeichnung (a) und (b) verschwinden.

Oberintegral

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(a,b)} \overline{S}_Z(f)$$

Unterintegral

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a,b)} \underline{S}_Z(f)$$

Lemma 1.1

Für eine beschränkte Funktion $f : J = [a,b] \to \mathbb{R}$ existieren das Ober- sowie Unterintegral.

Bw.: Ober- und Untersummen einer beschränkten Funktion f sind beschränkt, da

$$\inf_{x \in J} f(x)(b-a) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq \sup_{x \in J} f(x)(b-a)$$

Die Existenz von Ober- und Unterintegralen folgt dann aus der Existenz von Supremum und Infimum von beschränkten Zahlenmengen. □

Bem. 1.1:

(a) Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S}_{Z_n} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \text{ und}$$

$$\lim_{n \to \infty} \overline{S}_{Z_n} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

man mache sich klar, daß $n \to \infty$ bedeutet: $h \to 0$.

(b) Das Unterintegral „unterschätzt" den Flächeninhalt, das Oberintegral „überschätzt" den Flächeninhalt, also

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Def 1.1 (Riemann-Integral)

Sind Ober- und Unterintegrale für eine beschränkte Funktion $f: J = [a,b] \to \mathbb{R}$ gleich, so heißt der gemeinsame Wert das (bestimmte) Riemann-Integral von f über J:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

und die Funktion f wird Riemann-integrierbar genannt.

Daraus können wir sofort ableiten: ...

<u>Satz 1.1</u> (Riemann'sches Integrabilitätskriterium)

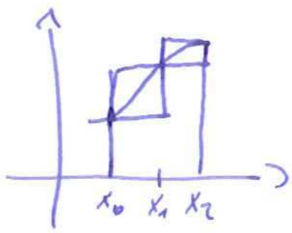
Eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann über $[a,b]$ Riemann integrierbar, wenn es zu bel. $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ gibt, s.d. für die zugeh. Ober- und Untersummen gilt:

$$|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| < \varepsilon$$

... wir erinnern uns an konvergente Folgen aus der Analysis I.

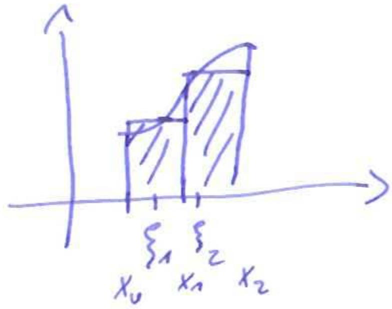
und die Funktion f wird Riemann integrierbar genannt.

Betrachte Ober-/Untersumme, Fehlerkästchen



$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)$$

wenn die Zerlegung immer feiner wird müßte es doch eigentlich egal sein, wo man „Kästchen" ansetzt:



Def 1.2 (Riemann'sche Summe)

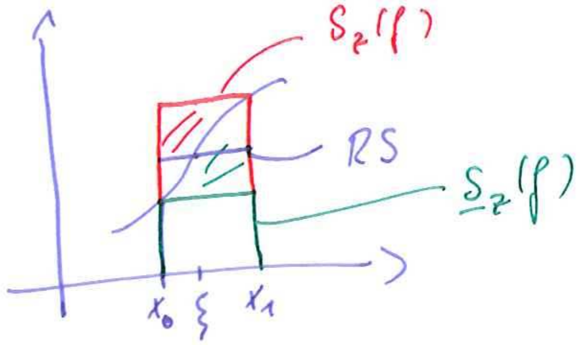
Für eine Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ wird die mit irgendwelchen Punkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gebildete Summe

$$RS_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

als eine Riemannsche Summe bezeichnet.

... kommt denn nun wirklich im Limes

das gleiche raus bei $\underline{S}_Z(f)$, $\overline{S}_Z(f)$ und $RS_Z(f)$?



Offensichtlich gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq RS_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

und da lt. Satz 1.1. $|\underline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f)| < \varepsilon$

fertig!

Andersherum gilt:

Seien alle Riemannsummen gegen denselben Lim konvergent.

Für jede Ober- und Untersumme $\overline{S}_Z(f)$ und $\underline{S}_Z(f)$ und bel. Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ gibt es dann Riemannsche Summen $\overline{RS_Z(f)}$, $\underline{RS_Z(f)}$ mit

$$RS_Z(f) - \varepsilon \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq RS_Z(f) + \varepsilon.$$

Aus der Konvergenz ($h \to 0$) aller Riemannsummen gegen denselben Lim (lt. Voraus.) und bel. $\varepsilon > 0$ folgt damit

$$|\underline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f)| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Wir fassen zusammen

Satz 1.2:
Eine beschränkte Funktion $f: J = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-Int'bar, wenn für jede Folge von Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $h_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ alle zugehörigen Riemannschen Summen konvergieren und denselben Grenzwert haben.

$$RS_{Z_n}(f) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

Satz 1.3

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-int'bar.

Bew.:

Sei $\varepsilon > 0$ und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ so gewählt, daß

$$(*) \quad |\sup\{f(x)\} - \inf\{f(x)\}| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

(geht, da f auf $[a,b]$ stetig, also glm. stetig:

$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \; \exists \delta > 0 :$

$$|x - \tilde{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \tilde{\varepsilon} \quad \forall x, \tilde{x} \in [a,b]$$

hier: $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b-a}$, falls wir n groß genug wählen wird δ ausreichend klein.)

Also: mit $J_i = [x_{i-1}, x_i]$

$$|\overline{S}_n - \underline{S}_n| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in J_i}\{f(x)\}(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in J_i}\{f(x)\}(x_i - x_{i-1}$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(\sup_{x \in J_i}\{f(x)\} - \inf_{x \in J_i}\{f(x)\}\Big)(x_i - x_{i-1})$$

$$\overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

$\square$

Satz 1.4

Eine (beschränkte) monotone Funktion $f: J = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-int'bar.

Bw.:

Sei OE f mon. steigend.

Dann gilt $f(a) \le f(x) \le f(b) \quad \forall x \in J := [a,b]$

Für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit Feinheit h gilt:

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

$$\le h \cdot \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = h(f(b) - f(a)).$$

Also für jedes $\varepsilon > 0$ ex. $h_\varepsilon > 0$ s.d. für alle $h < h_\varepsilon$

$$|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| < \varepsilon.$$

$\square$

Satz 1.5 (Eigenschaften des Integrals)

Es seien $f, g : J = [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktionen, dann gilt:

(a) Zusammengesetzte Integrale

f ist auch über jedem Teilinvervall $[a', b'] \subset [a,b]$ Riemann-int'bar, und für $c' \in (a,b)$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^b f(x)\,dx$$

(b) Sei $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ für ein $c' \in (a,b)$ Riemann-int. auf $[a,c']$ und $[c',b]$, dann auch auf $[a,b]$.

(c) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist auch $\alpha f + \beta g$ Riemann-int. mit

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b f(x)\,dx$$

(d) falls $g(x) \geq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ gilt, dann ist auch

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$

(e) Die Funktionen $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := \min\{f, 0\}$ sind R-Int.

(f) $|f|$ ist R-Int und $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ und $|f|^p$ ist R-Int. mit $p \in [1, \infty)$ und $f \cdot g$ ist R-Int.

Korollar 1.1

Für eine (beschränkte) R-int.'bare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$ gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Bw.:

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a).$$

Korollar 1.2 (Definitheit des Riemann Integrals)

Sei $f: J = [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0.$$

Bw.: Übung

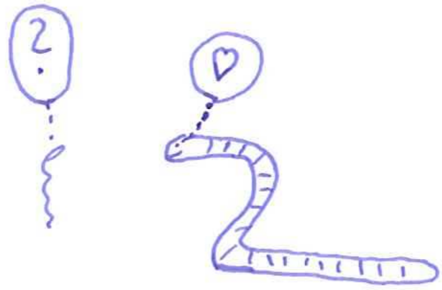
Bem:

Bisher haben wir das Rie-Int. nur auf Intervallen $J = [a,b]$ definiert und gefordert, daß $a \leq b$ ist, wir definieren aus „kosmetischen" Gründen für $a \leq b$

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

Satz 1.6 (Mittelwertsatz d. Integralrechnung)

Es seien $f: J = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g: J \to \mathbb{R}$ Rie-intbar und g habe in J keinen Vorzeichenwechsel. Dann gibt es eine Zwischenstelle



$\xi \in [a,b]$, so daß gilt

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Bw.:

~~Bw~~ Diese Behauptung ist eine Konsequenz des Zwischenwertsatzes (in Analysis I - Unterlagen nachsehen) für stetige Funktionen.

Wir betrachten OE $g \geq 0$. Da f stetig ist, ex.

$$m := \min_{x \in J} f(x) \quad \text{und} \quad M := \max_{x \in J} f(x).$$

Wegen $g \geq 0$ gilt nun

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Aufgrund des Zwischenwertsatzes angewendet auf die lineare Funktion

$$\varphi(t) := (m(1-t) + Mt)\int_a^b g(x)\,dx \quad , 0 \leq t \leq 1$$

sowie die Funktion f, gibt es zunächst ein $\mu \in [m,M]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{und dann ein } \xi \in [a,b]$$

mit $\mu = f(\xi)$. $\square$