1.2 Rechnen Sie mit Integralen

Integration ist in gewissem Sinne die Umkehrung der Differentiation.

Def 1.3 (Stammfunktion)

Eine Funktion $F: J := [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt unbestimmtes Integral oder Stammfunktion einer Funktion $f: J \to \mathbb{R}$ wenn sie differenzierbar ist und wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad x \in J$$

Schreibweise:

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Nun kommen wir zu einem wichtigen Satz, der uns das „integrale" Leben leichter machen wird.

Satz 1.7 (Fundamentalsatz)

a) Für eine stetige Funktion $f: J = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist das bestimmte Riemann-Integral

$$F(x) = \int_a^x f(y)\, d(y), \quad x \in [a,b]$$

aufgefaßt als Funktion der oberen Grenze x eine Stammfunktion von f. Jede weitere Stammfunktion von f unterscheidet sich von F nur durch eine Konstante.

b) Ist umgekehrt die Funktion $F := J = [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion einer stetigen Funktion f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Bw.

zu a) Wir betrachten den Differenzenquotienten der Funktion $F(x)$:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(y)\,dy - \int_a^{x} f(y)\,dy\right) = \frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(y)\,dy.$$

Nach dem Mittelwertsatz (Satz 1.6) ex. $\xi_h \in [x, x+h]$ mit

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi_h).$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\xi_h \to x$, s.d. wegen der Stetigkeit von f folgt

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x). \qquad (*)$$

Sei G eine weitere Stammfunktion von f, dann gilt wegen $(*)$

$$F' - G' = (F-G)' = 0 \Rightarrow F - G \text{ konst.}$$

b) Sei F eine Stammfunktion von f, d.h.

$F'(x) = f(x)$.

Mit der Funktion

$$G(x) = \int_a^x f(y)\,dy \qquad G(a) = 0 \quad (\text{wählen})$$

ist dann gemäß Teil (a) $F - G$ konstant,

deshalb ist

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b f(y)\,dy$$

$\square$

Bem.:

Satz 1.7. besagt daß Differentiation und Integration zueinander inverse Prozesse sind:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)\,dy = f(x) \quad , \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\,dy .$$

EINSCHUB: UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Salopp: uneigentliches Integral: irgendwas wandert gegen ∞

nur was?

Grundsätzlich können wir zwischen zwei Arten unterscheiden

Typ I: (unbeschränkte Integrationsintervalle)

$[a,\infty)$; $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$

$(-\infty,b]$; $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

$(-\infty,\infty)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$

Typ II: (unbeschränkte Integranden)

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ist an der oberen Grenze uneigentlich:

  $$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\nearrow b}\int_a^c f(x)dx$$

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ist an der unteren Grenze uneigentlich:

  $$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\searrow a}\int_c^b f(x)dx$$

Bsp zu Typ I:

(a) Löse $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$:

$$\int_1^{l} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{l} = -\frac{1}{l} - (-1) = 1 - \frac{1}{l}$$

also

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{l \to \infty} \int_1^{l} \frac{dx}{x^2} = \lim_{l \to \infty} \left(1 - \frac{1}{l}\right) = \underline{\underline{1}}.$$

(b) Löse $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$, beachte $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

dann

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty.$$

Wieso?

Na bei (b) ex. der Grenzwert nicht !

(c) Löse $\int_h^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$, $h > 0$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{h \to 0} \int_h^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{h \to 0} \left(2 - 2\sqrt{h}\right) = \underline{\underline{2}}.$$

Bsp zu Typ II

Löse $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

$$\lim_{c \searrow 1} \int_c^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{c \searrow 1} \left[2\sqrt{x-1} \right]_c^2 = \lim_{c \searrow 1} \left(2 - 2\sqrt{c-1} \right) = \underline{\underline{2}}$$

Grenzwert muß existieren.

Aufpassen bei Typ II:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^2 = -1-(1) = -2$$

... klingt gut, ist jedoch falsch!!

richtig:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \underbrace{\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{!!} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{\text{nun das lim nochmal ausrechnen...}}$$

ENDE EINSCHUB

... jetzt wieder zum Lösen von Integralen

Dank Satz 1.7 und den Regeln der Differentiation (aus Analysis I) gewinnen:

1. Allgemeine Potenzfunktion $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\int y^\alpha \, dy = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$$

2. Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^k$

$$\int \sum_{k=0}^{n} a_k y^k \, dy = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1}$$

3. Allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$, $a > 0$

$$\int a^y \, dy = \int e^{y \ln(a)} \, dy = \frac{e^{x \ln(a)}}{\ln(a)} = \frac{a^x}{\ln(a)}.$$

4. Reziproke Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} x > 0 &: (\ln(x))' = \frac{1}{x} \\ x < 0 &: (\ln(-x))' = \frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{y} \, dy = \log(|x|).$$

5. Sinus und Cosinus $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$

$$\int \sin(y) \, dy = -\cos(x), \quad \int \cos(y) \, dy = \sin(x).$$

Stammfunktionen, (ohne Kommentar)

$$\int \frac{dy}{\cos^2(y)} = \tan(x), \quad \int \frac{dy}{\sin^2(y)} = -\cot(x)$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(x), \quad \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(x).$$

Lemma 1.2 (partielle Integration)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt:

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = (fg)(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx.$$

Bw.:

Durch Integration der Identität:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

erhält man

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\, dx = \int_a^b (fg)'(x)\, dx = (fg)(x)\Big|_a^b.$$

□

Bsps

Man sollte mit ein wenig Taktik an die Integrale herantreten um zu sehen, wie man die part. Integration am besten anwendet: (mit $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int uv'$

1. Art (Polynom eliminieren)

$$\int_0^1 \underbrace{e^x}_{u'}\underbrace{(2-x^2)}_{v}\,dx = [\underbrace{e^x}_{u}\underbrace{(2-x^2)}_{v}]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{(-2x)}_{v'}\,dx$$

$$= e - 2 + \int_0^1 e^x(2x)\,dx$$

$$\int_0^1 \underbrace{e^x}_{u'}\underbrace{(2x)}_{v}\,dx = [\underbrace{e^x}_{u}\underbrace{2x}_{v}]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{2}_{v'}\,dx = 2e - 2\int_0^1 e^x.$$

Insgesamt:

$$\int_0^1 (2-x^2)e^x\,dx = e - 2 + 2e - 2e + 2 = e.$$

2. Art (Der „Eins-" Trick)

$$\int_2^3 \ln x\,dx = \int_2^3 \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v} = [\underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\ln x}_{v}]_2^3 - \int_2^3 \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\,dx$$

$$= 3\ln 3 - 2\ln 2 - [x]_2^3 = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 3 + 2 = \ln\frac{27}{4} - 1.$$

3. Art („Alte Bekannte wiedersehen")

(lohnt sich bei exp, sin, cos und co.)

$$\int_0^1 \underbrace{e^{-x}}_{u'} \underbrace{\sin 2x}_{v}\, dx = \Big[\underbrace{-e^{-x}}_{u} \underbrace{\sin 2x}_{v}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{-e^{-x}}_{u} \underbrace{2\cos 2x}_{v'}\, dx$$

$$= 0 + 2\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cos 2x\, dx$$

$$= 2\Big[-e^{-x} \cos 2x\Big]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} -e^{-x}(-2) \sin 2x\, dx$$

kennen sich ☐

... ein alter Bekannter

umformen bringt:

$$5\int_0^{\pi/2} e^{-x} \sin 2x\, dx = 2e^{-\pi/2} + 2$$

4. Art (in die Wüste rechnen)

Warnung! Es gibt Arten bei denen part. Integration garnichts bringt.

$$\int_0^{\pi} \underbrace{e^{x}}_{u'} \underbrace{\cos x}_{v}\, dx$$

Worträtsel: $\frac{k}{\pi}$

Lösung: Kapitel

Satz 1.8 (Substitutionsregel)

Seien $f: J \to \mathbb{R}$ eine stetige und $\varphi: [a,b] \to J$ eine stetig diff'bare Funktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,dx.$$

Bew.: Sei $F: J \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f. Die Komposition $F \circ \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist dann stetig diff'bar und nach der Kettenregel gilt

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'(\varphi(y))\,\varphi'(y) = f(\varphi(y))\,\varphi'(y).$$

Aufgrund des Fundamentalsatzes (Satz 1.7) folgt dann

$$\int_a^b f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy = \int_a^b (F \circ \varphi)'(y)\,dy$$

$$= (F \circ \varphi)(y)\Big|_a^b = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a)$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

$\square$

Bsp. 1

(a) $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^3 (-\sin x)\,dx$

Schwierigkeit: die „innere" Funktion zu finden

$\varphi(x) = \cos x$, $\varphi'(x) = -\sin x$, $f(t) = t^3$

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^3 (-\sin x)\,dx = \int_{\cos 0}^{\cos\frac{\pi}{2}} t^3\,dt = \left[\frac{1}{4} t^4\right]_1^0 = -\frac{1}{4}$$

(b) $\int_0^1 x e^{-x^2}\,dx$

$\varphi(x) = -x^2 = t$, $\varphi'(x) = -2x$,

$\varphi'(x)dx = -2x\,dx \overset{!}{=} dt \iff x\,dx = -\frac{1}{2}dt$

$\varphi(0) = -0^2 = 0$, $\varphi(1) = -1$

Also:

$$\int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = \int_0^{-1} e^t \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{-1} = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1)$$

$$= \frac{e-1}{2e}.$$

Kochrezept

- Man nehme ein geeignetes $\varphi(x)$ s.d. $\varphi'(x)$ bis auf einen konstanten Faktor im Integranden als Faktor vorkommt, setze für $\varphi(x)$ dann t
- „Backen" Sie $\varphi'(x)$ (berechnen)
- Ersetzen Sie $\varphi(x)dx$ durch dt
- Ersetzen Sie die ursprünglichen Grenzen a und b durch $g(a)$ und $g(b)$.
- Jetzt integrieren...

Integration rationaler Funktionen

rat. Fkt.:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_r x^r + \ldots + a_0}{b_s x^s + \ldots + b_0}$$

$p(x), q(x)$ - Polynome

$r(x)$ kann man (immer) umschreiben zu Summe, die aus folgenden Typen bestehen:

$$r_1(x) = \frac{A}{(x+a)^n}, \quad r_2(x) = \frac{B + Cx}{(x^2+2bx+c)^n}, \quad n \geq 1$$

die dann hoffentlich leichter zu berechnen sind.

Dazu brauchen wir zwei „Tools"

Polynomdivision und Partialbruchzerlegung

„Learning by doing"

<u>Bsp.:</u>

Löse $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} \, dx$

Polynomdivision liefert:

$$\frac{x^3-2x^2+x+5}{x^2-1} = x-2+\frac{2x+3}{x^2-1}$$

NST: $x^2-1=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1$

Partialbruchzerlegung:

Wunsch: Finde A, B s.d.:

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \qquad (*)$$

$(*)$ mit $(x-1)$ und $(x+1)$ multiplizieren bringt

$$2x+3 = A(x+1)+B(x-1)$$

lin. Gleichungssystem liefert: $A=\frac{5}{2},\ B=-\frac{1}{2}$

Integration:

$$\int \frac{x^3-2x^2+x+5}{x^2-1}\,dx = \int (x-2)\,dx + \frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x+\frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

fertig