2 Skalare Differentialgleichungen

2.1 Modellierung (math. Beschreibung) physik., biolog., ökonom. Sachverhalte (Prozesse) durch Änderungsraten.

Tauchsieder

Bsp: 1) Wasser kochen

Topf

Temperaturänderung ~ Leistung · Zeit

$\Delta T = T_2 - T_1$ $\quad P \quad$ $\Delta t = t_2 - t_1$

Proportionalitätsfaktor: c (Wärmekapazität)

$$c\,\Delta T = P \cdot \Delta t \iff \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{P}{c} \leftarrow \text{konstant?}$$

$P = P(t) \longrightarrow \Delta t$ klein wählen

$$\rightarrow \boxed{T'(t) = \frac{P(t)}{c}}$$ Differentialgleichung

(Gleichung für eine Funktion $T(t)$, in der Ableitungen $T'(t)$ vorkommen)

[Häufig auch in Newton-Notation $\dot{T}(t) = \frac{P(t)}{c}$ für Zeitableitungen]

Lösung: $T(t)$ ist Stammfunktion von $\frac{P(t)}{c}$

$\Rightarrow$ Lösung ist nur bis auf Konstanten bestimmt: $T(t) = T_0 + \frac{1}{c}\int P(t)\,dt$

Aber: $T(t)$ physikalisch eindeutig $\rightarrow$ Zusatzbedingung stellen

$T(t)$ unbekannt für $t > t_0$

Anfangswert $T(t_0)$ i.a. bekannt

$$\Rightarrow \text{Lösung } T(t) = T(t_0) + \frac{1}{c}\int_{\tau = t_0}^{t} P(\tau)\,d\tau$$

2) Bakterienwachstum y: Population

Teilungsrate konstant $\Rightarrow$ Zuwachs $\Delta y \sim y \cdot \Delta t$ (für festes Δt). $y'(t) = c \cdot y(t)$

Lösung: y ist Stammfunktion von $c \cdot y$:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{\tau = t_0}^{t} c\, y(\tau)\, d\tau$$

Hilft nicht bei der Lösung: $y(\tau)$ nicht bekannt!

Hier: gezieltes Raten: $y(t) = y(t_0) \exp(c(t - t_0))$

realistischeres Modell: Nahrungskonkurrenz

$\Rightarrow c \searrow 0$ für $y \nearrow y_{max}$, etwa $c(y) = c_0 \left(1 - \frac{y}{y_{max}}\right)$

$$y'(t) = c_0\, y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_{max}}\right)$$

gezieltes Raten: $y(t) = ?$

Def 2.1 Eine gewöhnliche Differentialgleichung (engl. ODE) der Form $y'(t) = f(y(t), t)$ f.a. $t \in [t_0, t_{end}]$ für $y: [t_0, t_{end}] \to \mathbb{R}$ heißt Integral, falls f nicht von y abhängt ($f(y,t) = f(z,t)\ \forall y,z,t$) und autonom, falls f nicht von t abhängt ($f(y,t) = f(y,\tau)\ \forall t, \tau, y$).

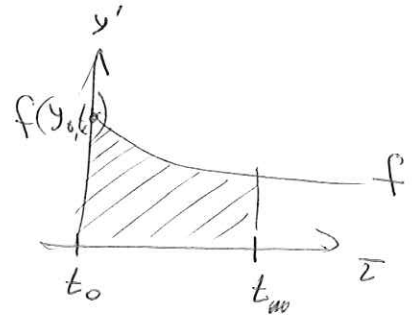
Ist eine Lösung $y(t)$ gesucht, die den Anfangswert $y(t_0) = y_0$ annimmt, heißt dies Anfangswertproblem.

Drei Fragen:
- Existenz
- Eindeutigkeit
- Berechnung

von Lösungen

2.2 Berechnung von Lösungen I

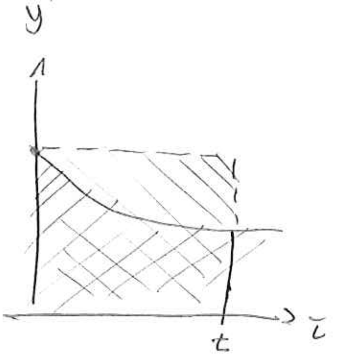
$$y'(t) = f(y(t),t) \qquad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(y(\tau),\tau)\, d\tau$$
$$y(t_0) = y_0$$



Integration von Differentialgleichungen

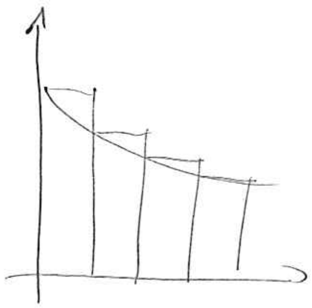
f stetig $\Rightarrow f(y(\tau),\tau) \approx f(y_0,t_0)$

↑ Fehler



$$y(t) \approx y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(y_0,t_0)\, d\tau$$
$$= y_0 + (t-t_0)\cdot f(y_0,t_0)$$

Approximationsfehler wird kleiner für $t-t_0$ kleiner.



Integral $\rightarrow$ Riemann-Summe

$y(t) \rightarrow y(t_i),\ i=1,\dots,N$

Eulersches Polygonzugverfahren
(Euler-Verfahren)

Bsp $\quad y'(t) = y(t)$ auf $[0,1]$ $\quad \rightarrow$ Lösung $y(t) = \exp(t)$
$\quad y(0) = 1$

Äquidistante Zerlegung
in n Teilintervalle:

$t_i = \frac{i}{n},\ i=0,\dots,n$

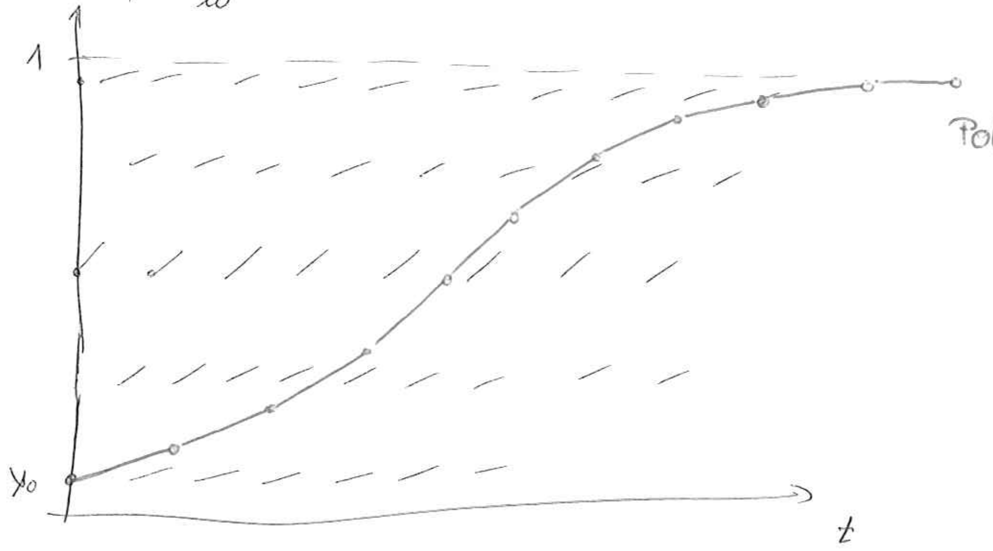
$$y_{i+1} = y_i + (t_{i+1}-t_i)\, f(y_i,t_i) = y_i + \frac{1}{n} y_i = y_i\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_i = y_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^i$$

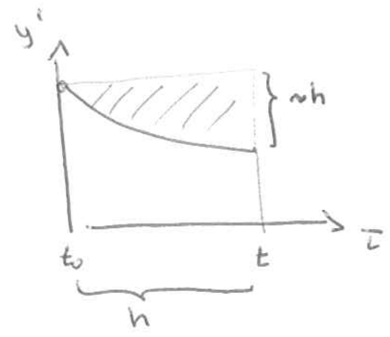
$$y(1) \approx y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ für } n \to \infty \quad [\text{Konvergenz}]$$

Bsp $y' = 4y(1-y)$

$y(0) = \frac{1}{10}$



Trapezregel



$$\text{Fehler } \left| h \cdot f(y_0, t_0) - \int_{\tau = t_0}^{t} f(y(\tau), \tau)\, d\tau \right|$$

$$\le \left| h \cdot f(y_0, t_0) - \int_{\tau = t_0}^{t} \left(f(y_0, t_0) + \tau f'(y_0, t_0) + \frac{\tau^2}{2} f''(y(\xi), \xi) \right) d\tau \right|$$

$$\cancel{\le h^2 \max |f'| + h^3}$$

$$\le \frac{h^2}{2} |f'(y_0, t_0)| + \frac{h^3}{6} \max |f''|$$

→ Fehler je Schritt: $c \cdot h^2$

Anzahl Schritte: $\frac{t_{end} - t_0}{h}$

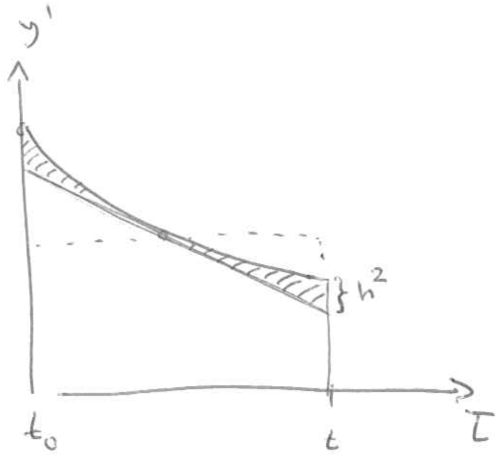
⇒ Gesamtfehler beschränkt durch $c \cdot h$

Achtung! Ist noch kein Konvergenzbeweis: y_i

⇒ $f(y_i, t_i)$

Vorstandsassistent. Konzerngewinn auf 1000€ genau, Chef will auf (1s) Cent genau, Vorstandssitzung in 1h

> Für jede Dezimalstelle Genauigkeit erhöht sich der Rechenaufwand um den Faktor 10!



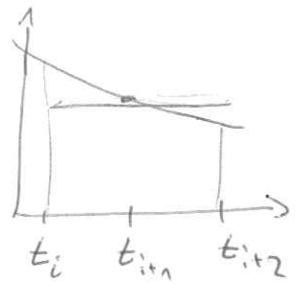
Fläche unter der Kurve
≈ Fläche des Trapez
(bessere Approximation)

~~$\int_{\tau=t_0}^{t} f(y(t_0+\frac{h}{2}), t_0$~~

$$\int_{\tau=t_0}^{t} f(y(\tau),\tau)\,d\tau \approx h\cdot f\left(y\left(t_0+\tfrac{h}{2}\right), t_0+\tfrac{h}{2}\right)$$

Zeitschrittmittelpunkt
(Mittelpunktregel)

Aber: $y(t_0+\frac{h}{2})$ unbekannt



Ausweg: $y(t_{i+2}) = y(t_i) + \int_{\tau=t_i}^{t_{i+2}} f(y(\tau),\tau)\,d\tau$

$\approx y(t_i) + 2h\, f(y_{i+1}, t_{i+1})$

(Zweischrittverfahren)

Fehler je Schritt: $c\cdot h^3$
Anzahl Schritte $\frac{c}{h}$

$\Rightarrow$ Gesamtfehler $c\cdot h^2$

$\Rightarrow$ Für jede Dezimalstelle Genauigkeit erhöht sich der Rechenaufwand um $\sqrt{10} \approx 3.1$

2.3 Berechnung von Lösungen II

analytische Lösungen in Spezialfällen

Trennung der Variablen

t, y getrennt

$$y'(t) = a(t)\,g(y(t)) \quad\Rightarrow\quad f(y,t) = a(t)\,g(y)$$

Dann gilt $\dfrac{y'(s)}{g(y(s))} = a(s)$ f.a. s falls $g(y) \neq 0$

$$\Rightarrow \int_{\tau=t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))}\, d\tau = \int_{\tau=t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau$$

Substitution $z := y(\tau) \to dz = y'(\tau)\, d\tau$

$$\int_{\tau=t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))}\, d\tau = \int_{z=y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(z)}\, dz = \int_{\tau=t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau$$

Daraus läßt sich mitunter eine Lösung $y(t)$ berechnen:

Bsp $y'(t) = y(t)^2 \quad \to a = 1,\ g(y) = y^2$

$$\int_{\tau=t_0}^{t} 1\, d\tau = t - t_0 = \int_{z=y_0}^{y(t)} \frac{1}{z^2}\, dz = -\frac{1}{z}\Big|_{y_0}^{y(t)} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0(t - t_0)}$$

Offenbar gilt $y \to \infty$ für $t \to t_0 + \frac{1}{y_0}$.

$\boxed{\text{Lösungen von Differentialgleichungen müssen nicht für beliebig lange Zeiten existieren!}}$

Variation der Konstanten

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \qquad \text{(lineare Differentialgleichung)}$$

zugehörige homogene DGL: $z'(t) = a(t)z(t)$
hat Lösungen der Form $z(t) = c \cdot \exp\left(\int_{\tau=t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau\right)$
[nachrechnen!]. Sei $v(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau\right)$
Lösung zu $c = 1$.

Ansatz: $c \to c(t)$ „Variation der Konstanten"

$$y(t) = c(t) \cdot v(t) \Rightarrow y'(t) = c'(t)v(t) + c(t)v'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Nun gilt $c(t)v'(t) = c(t)a(t)v(t)$ ← hom. DGL

$= a(t)y(t)$ ← Ansatz

daher bleibt übrig

$$c'(t)\,v(t) = b(t),$$

also
$$c(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{v(\tau)}\,d\tau + \gamma.$$

Zusammen:
$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\right)\left[\int_{\tau=t_0}^{t} \exp\left(-\int_{s=t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right) b(\tau)\,d\tau + \gamma\right]$$

mit $y(t_0) = \gamma$

<u>Bsp</u> $y'(t) = a\,y(t) + b(t), \quad y(0) = y_0$

hat die Lösung
$$y(t) = e^{at}\left(\int_{\tau=0}^{t} e^{-a\tau}\, b(\tau)\,d\tau + y_0\right)$$

<u>Wachstumsprozeß</u>
$$y'(t) = y(t)\,(1-y(t))$$
$$y(0) = y_0$$

Trennung der Variablen mit $g(z) = z(1-z)$, $a = 1$:

$$t = \int_{z=y_0}^{y(t)} \frac{1}{z(1-z)}\,dz$$

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$

$$= \int_{z=y_0}^{y(t)} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) dz$$

Substitution $s = 1-z \Leftrightarrow z = 1-s$

$\frac{dz}{ds} = -1 \Rightarrow dz = -ds$

$$= \ln z\Big|_{y_0}^{y(t)} + \int_{s=1-y_0}^{1-y(t)} -\frac{1}{s}\,ds$$

$$= \ln y(t) - \ln y_0 - \ln s\Big|_{1-y_0}^{1-y(t)}$$

$$= \ln y(t) - \ln(1-y(t)) + \ln(1-y_0) - \ln y_0$$

$$= \ln \frac{y(t)}{1-y(t)} + \ln \frac{1-y_0}{y_0}$$

$$e^t = \frac{y(t)}{1-y(t)} \cdot \frac{1-y_0}{y_0}$$

Auflösen nach $y(t)$:

$$(1-y(t))\ e^t \frac{y_0}{1-y_0} = y(t)$$

$$\Rightarrow \quad e^t \frac{y_0}{1-y_0} = \left[1 + e^t \frac{y_0}{1-y_0}\right] y(t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{e^t \frac{y_0}{1-y_0}}{1 + e^t \frac{y_0}{1-y_0}} = \frac{e^t}{\frac{1-y_0}{y_0} + e^t}$$

Auswerten $y(0) = \dfrac{1}{\frac{1-y_0}{y_0} + 1} = y_0$

$$t \to \infty: \quad y \Rightarrow \frac{1}{\underbrace{e^{-t} \frac{1-y_0}{y_0}}_{\to 0} + 1} \to 1$$

$$t \to -\infty: \quad y \longrightarrow \frac{0}{\frac{1-y_0}{y_0} + 0} = 0$$

2.4 Existenz von Lösungen

Idee: (i) Konstruiere stückweise lineare Approximationen mit Euler-Verfahren
(ii) Zeige Existenz einer Grenzfunktion (Arzelá-Ascoli)
(iii) Zeige daß Grenzfunktion die DGL erfüllt

Satz 2.4.1 (Arzelá-Ascoli) [vgl. Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$]

Sei $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ~~[illegible]~~ von Funktionen auf $[a,b]$, die gleichmäßig beschränkt

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x\in[a,b]}} f^n(x) < \infty$$

und gleichgradig Lipschitz-stetig

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x\neq y\in[a,b]}} |f^n(x) - f^n(y)| \leq L\,|x-y|$$

sind. Dann existiert eine Teilfolge $(f^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein stetiges f konvergiert: $\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{n_k}(x) - f(x)| \to 0$.

Satz 2.4.2 (Peano)

Sei $f : [t_0, t_{end}] \times [y_0-\beta, y_0+\beta]$ stetig. Dann existiert eine Lösung $y : [t_0, T] \to [y_0-\beta, y_0+\beta]$, $T = \min(t_{end}, t_0 + \beta/M)$

des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

$M = \max f(t,y)$

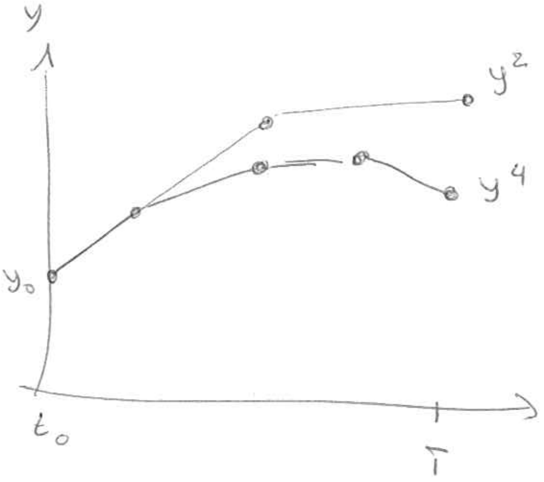
Bew (i) Zu $n \in \mathbb{N}_+$ äquidistante Unterteilung von $[t_0, T]$:

$t_i^n = t_0 + \frac{i}{n} T$, $i = 0, \dots, n$ mit Feinheit $h^n = \frac{T - t_0}{n}$.

Euler-Lösung: $y_{i+1}^n = y_i^n + h^n f(y_i^n, t_i^n)$

stückweise lineare Interpolation: $y^n(t) = \frac{t - t_i}{h} y_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t}{h} y_i$

falls $t \in [t_i, t_{i+1}]$



Konstruktion ist durchführbar:

$$|y_i^n - y_0| = |h^n \cdot \sum_{k=0}^{i-1} f(y_k^n, t_k^n)|$$
$$\leq h^n \sum_{k=0}^{i-1} |M| \leq \frac{T - t_0}{n} \cdot i M \leq (T - t_0) M$$
$$\leq \beta \quad \Rightarrow \quad y_i^n \in [y_0-\beta, y_0+\beta]$$
$$\Rightarrow \quad f(y_i^n, t_i^n) \text{ wohldefiniert.}$$

(ii) Wir verifizieren die Voraussetzungen von Satz 2.4.1:

- gleichmäßig beschränkt wegen $y_i^n \in [y_0-\beta, y_0+\beta]$ wie oben und lineares Interpolation.

- gleichgradige Lipschitz-Stetigkeit:
  wegen Stetigkeit und stückweiser Differenzierbarkeit mit $(y^n)'(t) = f(y_i^n, t_i)$ auf $]t_i, t_{i+1}[$
  $\Rightarrow |(y^n)'(t)| \leq M$

$\Rightarrow$ existiert stetige Fkt. $y : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ mit

$$\max_{t \in [t_0,T]} |y^n(t) - y(t)| \to 0$$

(iii) Wir zeigen $\left\{ y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(\tau),\tau)\,d\tau \right\}$.

Es gilt $\left| y(t) - y(t_0) - \int_{\tau=t_0}^{t} f(y(\tau),\tau)\,d\tau \right|$

$$\leq \underbrace{|y(t) - y^n(t)|}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty} + \left| \int_{\tau=t_0}^{t} \left[\underbrace{f(y(\tau),\tau) - f(y^n(\tau),\tau)}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty} \right] d\tau \right|$$

$$+ \left| y^n(t) - y^n(t_0) - \int_{\tau=t_0}^{t} f(y^n(\tau),\tau)\,d\tau \right| \quad (*)$$

Nun gilt ~~für $\tau \in [t_{i}, t_{i+1}]$~~

$$\int_{\tau=t_0}^{t_i^n} f(y^n(\tau),\tau)\,d\tau = \sum_{k=0}^{i-1} \int_{\tau=t_k^n}^{t_{k+1}^n} f(y^n(\tau),\tau)\,d\tau + \cancel{\int_{\tau=t_{i+1}}^{t} f(y^n(\tau),\tau)\,d\tau}$$

$$= \sum_{k=0}^{i-1} \left[\int_{\tau=t_k^n}^{t_{k+1}^n} \left(f(y^n(\tau),\tau) - f(y_k^n, t_k^n) \right) d\tau - \underbrace{h^n f(y_k^n, t_k^n)}_{\text{Euler-Schritte}} \right]$$

$$\cancel{+ \int_{\tau=t_{i+1}}^{t} f(y^n(\tau),\tau)\,dt}$$

Also $\left| y_{i+1}^n - y_0 - \int_{\tau=t_0}^{t_i^n} f(y^n(\tau),\tau)\,d\tau \right| \leq \sum_{k=0}^{i-1} \int_{\tau=t_k}^{t_{k+1}} \underbrace{|f(y^n(\tau),\tau) - f(y_k^n, t_k^n)|}_{\leq \varepsilon_n \text{ wg. glm. Stetigkeit von } f \text{ auf kompaktem Definitionsgebiet}} d\tau$

$$\leq \varepsilon_n \cdot (t - t_0)$$

Zudem gilt $|y^n(t) - y(t_i^n)| \leq \underbrace{M h^n}_{\to 0}$ für $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$

und $\left| \int_{\tau = t_i^n}^{t} f(y^n(\tau), \tau)\, d\tau \right| \leq h^n \cdot M$

Insgesamt gilt $(*) \to 0$ für $n \to \infty$. $\square$

2.5 Eindeutigkeit & Stabilität von Lösungen

[Ist die konstruktiv approximierbare Euler-Grenzlösung „die" Lösung? Wie ähnlich verhalten sich Lösungen?]

Bsp: AWP $y' = y$, $y(0) = 1$ $\Rightarrow$ $y(10) = e^{10}$

$y^\delta(0) = 1 + \delta$ $\Rightarrow$ $y^\delta(10) = (1+\delta)e^{10}$ $\Rightarrow |(y - y^\delta)(10)| = \delta e^{10} \gg \delta$

AWP $y' = -y$, $y(0) = 1$ $\Rightarrow$ $y(10) = e^{-10}$

$y^\delta(0) = 1+\delta$, $y^\delta(10) = (1+\delta)e^{-10}$ $\Rightarrow$ $|(y - y^\delta)(10)| = \delta e^{-10} \ll \delta$

[Vorzeichen wichtig!]

Def 2.5.1 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt einseitig Lipschitz-stetig mit Konstante L, falls gilt

$$f(x) - f(y) \leq L(x - y) \qquad \text{für } x > y.$$

Für diff'bare f heißt das offenbar $f'(x) \leq L$ (Lipschitz: $|f'(x)| \leq L$).

Satz 2.5.2 $f(y,t)$ sei stetig und einseitig Lipschitz-stetig bezüglich y (mit Konstante L). Dann gilt für zwei Lösungen y, z der DGL

$$y'(t) = f(y(t), t)$$

die Stabilitätsabschätzung

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-t_0)} \, |y_0 - z_0|$$

Bew Wir betrachten die Abweichung $e(t) = y(t) - z(t)$. Es gilt

$$e'(t) = f(y(t),t) - f(z(t),t)$$

$$= a(t) \cdot (y(t) - z(t)) \qquad \text{mit} \quad a(t) \leq L$$

und $e(t_0) = y_0 - z_0$. Nach Variation der Konstanten gilt

$$e(t) = e(t_0) \cdot \exp\left(\int_{\tau=t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \right)$$

und

$$|e(t)| \leq |e(t_0)| \cdot \exp\left(\int_{\tau=t_0}^{t} L \, d\tau \right)$$

$$= \exp((t-t_0)L) \cdot |e(t_0)| \qquad \square$$

Korollar 2.5.3 Ist f einseitig Lipschitz-stetig bezüglich y, so ist das AWP eindeutig lösbar.

Bsp

$y' = y \Rightarrow f(y,t) = 1 \cdot y \Rightarrow L = 1 \Rightarrow y - y^\delta \approx \delta \cdot e^{t}$

$y' = -y \Rightarrow \qquad L = -1 \Rightarrow y - y^\delta \approx \delta \cdot e^{-t}$

Für $L > 0$ wachsen Fehler mit der Zeit,
für $L < 0$ fallen sie (Stabilität).

$\longrightarrow$ Wesentliche Bedeutung für die Vorhersagbarkeit zeitabhängiger Prozesse (Chaostheorie, Wettervorhersage, ...)