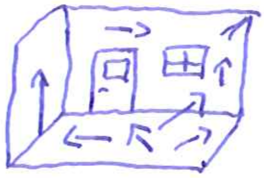
3. Der n-dimensionale Zahlenraum

Im Analysis I: Cauchy-Folgen etc.
auf einem Zahlenstrahl (also eindimensional)
nun wollen wir in höhere Dimensionen.

3.1. Der euklidische Raum $\mathbb{K}^n$

$\mathbb{K}^n$ steht für entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Wiederholung (Lin A)
(in Prosa)



... ein Vektorraum
(für eine bessere Def. siehe z.B. G. Fischer „Lineare Algebra")

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\mathbb{K}^n$ den Vektorraum der n-Tupel $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit Komponenten x_i, $i = 1, \dots, n$.
Für diese sind Addition und skalare Multiplikation definiert:

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \ \alpha \in \mathbb{K}.$$

Elemente von $\mathbb{K}$ werden als „Punkte" oder auch „Vektoren" bezeichnet.

linear unabhängig:

Ein System von m Vektoren $\{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\} \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt „linear abhängig", wenn es Skalare $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$ gibt, die nicht alle Null sind, s.d.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a^{(i)} = 0 \,,$$

andernfalls „linear unabhängig".

So ein System linear unabhängiger Vektoren des $\mathbb{K}^n$ kann max. n Elemente enthalten, ein solches maximales System heißt „Basis" und bestimmt mit seiner Mächtigkeit n die „Dimension" des $\mathbb{K}^n$. Die natürliche Basis des $\mathbb{K}^n$ ist die „euklidische" oder „kartesische Basis" bestehend aus den Vektoren $e^{(i)} := (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})$, $i = 1, \dots, n$.

Offenbar kann man jedes $x \in \mathbb{K}^n$ in der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{(i)}$$

als Linearkombination der Basisvektoren $e^{(i)}$ darstellen.

Def 3.1 (Norm):

Sei V irgend ein Vektorraum über $\mathbb{K}^n$.
Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ heißt Norm (auf V), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(N1) Definitheit: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$

(N3) Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ wird normierter Raum genannt.

normierte Raumfanten

Bsps:

- euklidische Norm (Klassiker):

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

- Maximumnorm (oder l_∞-Norm) und l_1-Norm:

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \quad , \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- l_p-Norm:

$1 < p < \infty$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^{1/p}.$$

Mit der Norm wird dann eine Abstandsfunktion (Metrik) erklärt, durch:

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Def 3.2:
Sei X irgend eine Menge. Eine Abbildung $d(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik (auf X), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(M1) Definitheit: $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(M2) Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) Dreiecksungl.: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Das Paar (X, d) wird metrischer Raum genannt.

Im folgenden werden wir Sätze beweisen, bei denen eigentlich die Metrik ausreicht und keine Vektorraumstruktur benötigt wird.
Wir verzichten hier auf diese formale Allgemeinheit zugunsten der Anschaulichkeit.

Mit dem Abstandbegriff $d(x, y) = \|x - y\|$ lassen sich die uns bekannten eindimensionalen Begriffe (Analysis I) auf ~~die~~ n-dim Punktmengen verallgemeinern.
Wir benutzen zunächst die Maximumnorm $(\|\cdot\|_\infty)$ werden aber später sehen, daß die Aussagen unabhängig von der gewählten Norm ist.

Für $a \in \mathbb{K}^n$ und $r > 0$ wird die Menge

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x - a\|_\infty < r\}$$

eine Kugelumgebung mit Radius r genannt.

Def 3.3 (Übertragung von 1-dim auf n-dim)

Eine Folge von Vektoren $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ des $\mathbb{K}^n$ heißt

(i) beschränkt, wenn alle ihre Elemente in einer Kugelumgebung $K_R(0)$ liegen.

(ii) Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, s.d. $\forall n, m > n_0$:

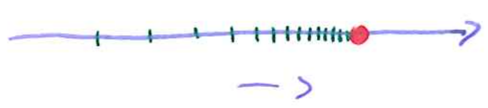
$$\| x^{(n)} - x^{(m)} \|_\infty < \varepsilon.$$

(ii) konvergent gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$, wenn

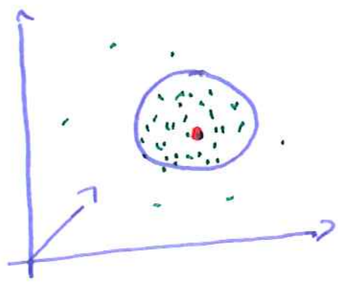
$$\| x^{(k)} - x \|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 .$$

Bem.:

ANALYSIS I



ANALYSIS II



Die so definierte Konvergenz ist offenbar gleichbedeutend mit der komponentenweisen Konvergenz:

$$\|x^k - x\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \iff x_i^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_i$$

also

$$\left\| \begin{pmatrix} x^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \right\|_\infty \to 0 \iff \left\| \begin{matrix} x_1^k - x_1 \\ \vdots \\ x_n^k - x_n \end{matrix} \right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Aha, man kann Konvergenz in Vektorfolgen im $\mathbb{K}^n$ auf Zahlenfolgen in $\mathbb{K}$ zurückführen. (Wir können also „erben")

__Satz 3.1 (Satz v. Cauchy & Satz v. Bolzano-Weierstraß)__

(i) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$ konvergiert, d. h. der normierte Raum $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.
Ein vollständig normierter Raum wird Banachraum genannt.

(ii) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}^n$ besitzt eine konv. Teilfolge.

Bew.: Übung

Bevor wir jetzt zu einem wichtigen Satz kommen, wollen wir uns schon mal ein Werkzeug anfertigen, daß wir beim Beweis brauchen werden:

Mit der Dreiecksungleichung (N3) ist klar, daß

$$\|a+b\| - \|b\| \leq \|a\|$$

Setze $a = x+y$ und $b=-y$:	setze $a = x+y$ und $b = -x$
$\|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$	$\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$

also zusammen $\quad \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ersetze nun y durch $-y$ und man erhält

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \tag{3.1}$$

<u>Satz 3.2</u> (Äquivalenz von Normen)

Auf dem endlich dimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen äquivalent zur Maximumsnorm, d.h. zu jeder Norm $\|\cdot\|$ gibt es ~~die~~ positive Konstanten M und m s.d.

$$m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty \quad , \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

Bw.:

Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm. Für jeden Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ gilt zunächst

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, \|e^{(k)}\| \leq M \, \|x\|_\infty \, , \quad M := \sum_{k=1}^{n} \|e^k\| .$$

Also Grenze nach oben ist schon klar.
Setze $S_1 := \{ x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty = 1 \}$ und $m := \inf \{ \|x\| , x \in S_1 \} \geq 0$.

Wir wollen nun zeigen, daß $m > 0$ ist, denn dann ergibt sich für $x \neq 0$ wegen $\|x\|_\infty^{-1} x \in S_1$ auch $m \leq \|x\|_\infty^{-1} \|x\|$ und folglich

$$0 < m \, \|x\|_\infty \leq \|x\| \, , \quad x \in \mathbb{K}^n .$$

Widerspruchsbew.:

Sei $m = 0$, dann ex. in S_1 eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\|x^k - 0\| = \|x^k\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Da die Folge bzgl. d. Max.-Norm beschränkt ist, gibt es nach Bolz.-W. (Satz 3.1.ii) eine Teilfolge, ebenfalls mit $x^{(k)}$ bezeichnet, welche bzgl. Max-Norm gegen ein x konvergiert.

Wegen

$$\left| 1 - \|x\|_\infty \right| = \left| \|x^{(k)}\|_\infty - \|x\|_\infty \right| \leq \|x^{(k)} - x\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

ist auch $x \in S_1$.

Andererseits gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\|x\| \leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)}\| \leq M \|x - x^{(k)}\|_\infty + \|x^{(k)}\|.$$

Für $k \to \infty$ folgt hieraus $\|x\| = 0$ und somit $x = 0$, was im Widerspruch zu $x \in S_1$ steht. $\square$

3.2 Geometrie des $\mathbb{K}^n$

Def 3.3 (Skalarprodukt)

Sei V irgend ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.
Eine Abbildung $(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(S1) Linearität: $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha (x_1, y) + \beta (x_2, y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(S2) Symmetrie: $(x, y) = \overline{(y, x)}$

(S3) Definitheit: $(x,x) \in \mathbb{R}$, $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Bem 3.1

(a) Semi-Skalarprodukt, falls in (S3) nur $(x,x) \in \mathbb{R}$ und $(x,x) \geq 0$ verlangt wird.

(b) Aus (S1) und (S2) folgt auch die Linearität im zweiten Argument und damit die volle „Bilinearität" des Skalarproduktes als eine „Sequilinearform" ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) oder „Bilinearform" ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

(c) (S1) kann in Additivität $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
und Homogenität $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$
aufgespalten werden.

(d) „bekanntestes" Skalarprodukt:

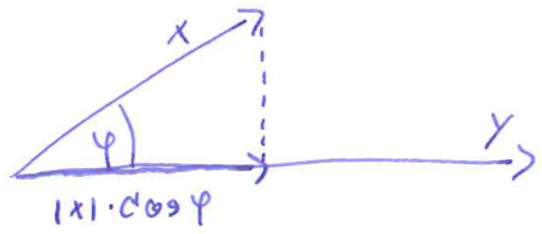
euklidisches Skalarprodukt über $\mathbb{K}$

$$(x,y)_2 := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

(e) Notation:

(x,y), $\langle x,y \rangle$, $x \bullet y$

(f) Anschaulich kann man das SkP wie folgt sehen und definieren



$$(x,y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos\varphi$$
$$= |x| \cdot \cos\varphi \cdot |y|$$

Projektion des Vektors x auf y.

Man überlege sich, wie Winkel φ aussehen muß, falls

$(x,y) > 0$, $(x,y) = 0$, $(x,y) < 0$

ist.

Lemma 3.1 (Bunjakowsky-Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Für ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf einem Vektorraum V über $\mathbb{K}$ gilt die folgende Ungleichung:

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y), \quad x,y \in V$$

Bew.:

Für $y=0$ klar, daher OE $y \neq 0$:
Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig:

$$0 \leq (x+\alpha y, x+\alpha y) = (x,x) + \alpha(y,x) + \bar{\alpha}(x,y) + \alpha\bar{\alpha}(y,y)$$

Mit $\alpha := \frac{-(x,y)}{(y,y)}$ impliziert dies

$$0 \leq (x,x) - (x,y)(y,y)^{-1}(y,x) - \overline{(x,y)}(y,y)^{-1}(x,y) + (x,y)\overline{(x,y)}(y,y)^{-1}$$
$$= (x,x) - |(x,y)|^2(y,y)^{-1}$$

bzw.:

$$0 \leq (x,x)(y,y) - |(x,y)|^2.$$

$\square$

Schauen wir uns nochmal (x,x) an,
also die Projektion von x auf sich selber, ...
sollte sowas wie die „Länge" des Vektors geben ...
„Länge" im Zusammenhang mit Vektor erinnert
uns an Norm.
Probieren wir mal:

setze $\|x\| := (x,x)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}$

(N1) und (N2) sind klar (selber machen !!)
wie sieht es mit (N3) aus?
Einfach mal bei der Dreiecksungleichung links
einsetzen:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$$
$$\leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \overset{L.3.1}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Aha, also

Korollar 3.1.

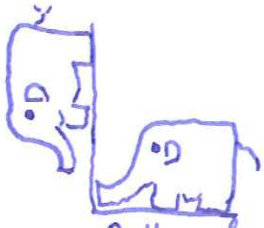
Von einem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf einem Vektorraum V über $\mathbb{K}$
(haben nur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gezeigt !!)
wird durch

$\|x\| := (x,x)^{1/2}$ eine Norm erzeugt.

Ist der so entstehende normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ vollständig,
so heißt das Paar $(V, (\cdot,\cdot))$ Hilbert-Raum.

Def 3.4. (Orthogonalsystem, Orthogonalbasis, Orthonormalbasis)

Ein Satz von Vektoren $\{a^{(1)},\dots,a^{(m)}\}$, $a^{(i)}\neq 0$ des $\mathbb{K}^n$ welche paarweise orthogonal sind, also $(a^{(k)},a^{(l)})=0$, für $k\neq l$ heißt Orthogonalsystem bzw. im Falle $n=m$ „Orthogonalbasis". Gilt $(a^{(k)},a^{(k)})=1 \ \forall k$ so spricht man von einem „Orthonormalsystem" bzw. „Orthonormalbasis".



Bem. 3.2:

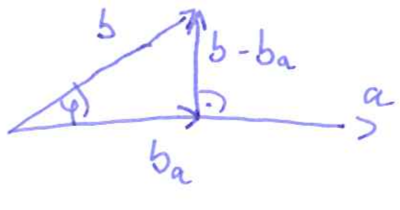
(a) Definition 3.4. klingt einleuchtend, wenn wir nochmal Bem. 3.1.(f) ansehen.

(b) Notation: Vektor a orthogonal zu b: $a \perp b$.

Bevor wir den Gram-Schmidt Algorithmus vorstellen, wollen wir noch kurz die Projektion erklären, was uns beim Verständnis helfen wird:

Die Projektion von b auf die „Richtung" a ist der Vektor b_a:

$$\begin{aligned} b_a &:= |b|\cdot\cos\varphi\cdot\frac{a}{|a|} \\ &= \frac{|b|}{|a|}\cdot\cos\varphi\cdot a\cdot\frac{|a|}{|a|} \\ &\overset{\substack{\text{Def. Skp} \\ \text{Bem. 3.1.f}}}{=} \frac{(a,b)}{|a|^2}\cdot a. \end{aligned}$$



Satz 3.3 (Gram-Schmidt-Verfahren)

Sei $\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$. Dann erhält man durch das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren

setze $b^{(1)} := \|a^{(1)}\|_2^{-1} a^{(1)}$ (normalisieren)

$$(*) \quad \tilde{b}^{(k)} := a^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (a^{(k)}, b^{(j)}), \quad b^{(k)} := \frac{\tilde{b}^{(k)}}{\|\tilde{b}^{(k)}\|}, \quad k = 2, \dots, n$$

eine Orthonormalbasis $\{b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(n)}\}$.

Bew.:

Zeige zunächst, daß Konstruktionsprozess (*) für $\tilde{b}^{(k)}$ für $k < n$ abbrechen kann: Die Vektoren $b^{(k)}$ sind lt. Konstruktion Lin.-kombinationen der $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$.

Sei nun für ein $k \le n$

$$a^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (a^{(k)}, b^{(j)}) b^{(j)} = 0,$$

dann würde dies bedeuten, daß die Vektoren $\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}$ linear abhängig sind.

Man zeigt nun durch Induktion, daß das Gram-Schmidt Verfahren tatsächlich eine Orthonormalbasis erzeugt.
Wir beschränken uns hier auf den Induktionsschritt:

Sei also nun $\{b^{(1)}, \ldots, b^{(k)}\}$ für $k \leq n$ bereits als Orthonormalsystem nachgewiesen.

Dann gilt für $l = 1, \ldots, k$:

$$(b^{(k+1)}, b^{(l)}) = (a^{(k+1)}, b^{(l)}) - \sum_{j=1}^{k} (a^{(k+1)}, b^{(j)}) \underbrace{(b^{(j)}, b^{(l)})}_{=\delta_{jl}} = 0$$

und $\|b^{(k+1)}\| = 1$, d.h. $\{b^{(1)}, \ldots, b^{(k+1)}\}$ ist ebenfalls ein Orthonormalsystem.