3.3. Teilmengen des $\mathbb{K}^n$

Im Satz 3.2 haben wir gezeigt, daß alle Normen im $\mathbb{K}^n$ äquivalent sind. Also werden wir irgendeine Norm verwenden und diese mit $\|\cdot\|$ bezeichnen.

Def 3.6 (Beschränkt, Umgebung, offen, abgeschlossen)

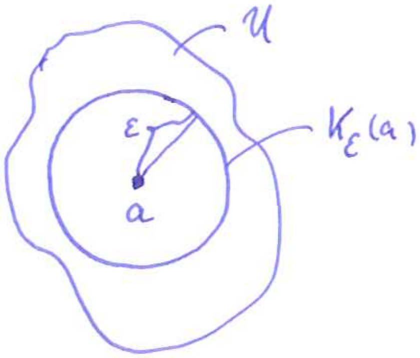
i) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}^n$ heißt beschränkt, wenn sie in einer Kugelumgebung enthalten ist.

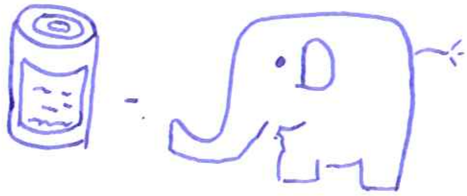
ii) Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{K}^n$ heißt Umgebung des Punktes $a \in \mathbb{K}^n$ wenn sie eine Kugelumgebung $K_\varepsilon(a)$ von enthält (auch ε-Umgebung genannt)

iii) Eine Menge $O \in \mathbb{K}^n$ heißt offen, wenn es zu jedem $a \in O$ eine Kugelumgebung $K_\varepsilon(a)$ gibt, die in O enthalten ist.

(iv) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $A^c := \mathbb{K}^n \setminus A$ offen ist.

Bild zu Def 3.6. ii)





„Dosenpfand"

Bsps

(i) Die Kugel $K_r(a) = \{ x \in \mathbb{K}^n ; \|x-a\| < r \}$ ist Umgebung jedes ihrer Punkte und ist offen.

(ii) Der n-dimensionale „Würfel" $[0,1]^n$ ist abgeschlossen.

Lemma 3.2:

Es gilt:

(i) Der Durchschnitt zweier Umgebungen von a ist wieder eine Umgebung von a.

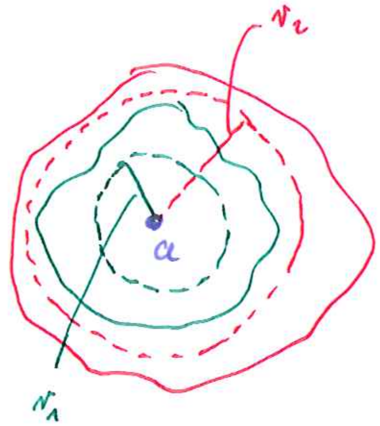
(ii) Zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in \mathbb{K}^n$ ex. disjunkte Umgebungen (Hausdorff'sche Trennungseigenschaft).

(iii) Der Durchschnitt endlich vieler ~~Menge~~ und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

(iv) Die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Bew.: (Wir zeigen nur (i) und (ii))

zu (i): Seien U_1 und U_2 Umgebungen von $a \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es Kugelumgebungen $K_{r_1}(a) \subset U_1$ und $K_{r_2}(a) \subset U_2$. Die Kugelumgebung $K_r(a)$ mit $r = \{r_1, r_2\}$ ist dann in $U_1 \cap U_2$ enthalten.



zu (ii): Für die Kugelumgebungen $K_r(a)$ und $K_r(b)$ mit Radius $r = \frac{1}{3}\|a-b\|$ gilt:

$$x \in K_r(a): \quad \|x-b\| \overset{\text{„0-Trick"}}{=} \|x-a+a-b\| \geq \|a-b\| - \|x-a\| \geq \frac{2}{3}\|a-b\| = 2r$$

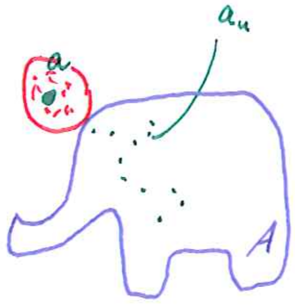
$$x \in K_r(b): \quad \|x-a\| = \|x-b+b-a\| \geq \|a-b\| - \|x-b\| \geq \frac{2}{3}\|a-b\| = 2r$$

also $K_r(a) \cap K_r(b) = \emptyset$.

Lemma 3.3

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Punkten in A ebenfalls in A liegt.

Bw.:



„=>": Sei A abgeschlossen. Angenommen, der Grenzwert a einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in A$ sei nicht in A, dann müßte a ja in einer offenen Menge $O := \mathbb{R}^n \setminus A$ liegen (Def 3.6. iv). Diese enthäelte dann als offene Umgebung von a fast alle a_n. ↯ zu $a_n \in A$.

„<=": Sei der Limes jeder konvergenten Folge aus A ebenfalls in A. Sei nun A nicht abgeschlossen, dann wäre $O := \mathbb{R}^n \setminus A$ nicht offen. Dann gibt es jedoch einen Punkt $a \in O$ derart, daß keine Kugelumgebung ganz in O liegt.

Insbesondere enthält ja dann jede Kugel $K_{1/k}(a)$ $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt a_k mit $a_k \notin O$.

Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liegt dann also in A und konvergiert wegen $\|a_k - a\| < \frac{1}{k}$ gegen den Grenzwert a, welcher (wegen der nicht-Abgeschlossenheitsannahme an A) nicht in A ist. $\lightning$.

<u>Def 3.7. (Randpunkt, Rand, Innere, Abschluß, Durchmesser)</u>

(i) Ein Punkt $a \in \mathbb{K}^n$ heißt Randpunkt einer Menge, wenn jede Umgebung von a Punkte sowohl aus M als auch aus $M^c := \mathbb{K}^n \setminus M$ enthält.
Die Menge solcher Punkte wird als <u>Rand</u> bezeichnet und mit ∂M beschrieben.

(ii) Für eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist $M^\circ := M \setminus \partial M$ das <u>Innere</u> von M.

(iii) Für eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist $\bar{M} := M \cup \partial M$ der <u>Abschluß</u> von M.

(iv) Für eine nicht-leere, beschränkte Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist der Durchmesser $\operatorname{diam}(M)$ definiert als:

$$\operatorname{diam}(M) := \sup\{\|x-y\|;\ x, y \in M\}.$$

Lemma 3.4.:

Für jede Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ gilt

(i) Der Rand ∂M ist abgeschlossen

(ii) Die Menge $M^\circ = M \setminus \partial M$ ist offen. Jede offene Teilmenge $O \subset M$ ist in M enthalten.

(iii) Die Menge $\bar{M} = M \cup \partial M$ ist abgeschlossen. Jede abgeschlossene Menge A mit $M \subset A$ enthält $M \cup \partial M$.

Bw.: Übung.

Bem. 3.

- Man mache sich klar, daß also eine Menge genau dann offen ist, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält.

- ... und eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Def 3.8.: (Häufungspunkt)

Ein Punkt $x \in \mathbb{K}^n$ heißt Häufungspunkt einer Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ wenn jede Umgebung von x mindestens einen Punkt aus $M \setminus \{x\}$ enthält.

Die Menge der Häufungspunkte von M wird mit $\mathcal{H}(M)$ bezeichnet. Ein Punkt $x \in M \setminus \mathcal{H}(M)$ wird isoliert genannt.

Satz 3.3

(i) Für jede Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ gilt

$$M \cup \mathcal{H}(M) = \overline{M}$$

(ii) Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Bew.:

zu (i) Sei $x \in \partial M$. Dann liegt in jeder $\frac{1}{k}$-Umgebung von x ein Punkt $x_k \in M$, d.h. x ist Grenzwert der Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Also ist x - Häufungspunkt von M und es gilt $M \cup \partial M = \overline{M} \subset M \cup \mathcal{H}(M)$. Weiter ist jedes $x \in \mathcal{H}(M)$ Grenzwert einer Folge von Punkten aus M, d.h. $x \notin \overline{M}^{\circ}$. Also ist $M \cup \mathcal{H}(M) \subset \overline{M}$.

zu ii) „⇒" Im Falle $\mathcal{H}(M) \subset M$ ist nach (i) $M = \overline{M}$, d.h. M - abgeschlossen

„⇐" Ist andererseits M abgeschlossen, so ist $M = M \cup \partial M = \overline{M}$ d.h. $\mathcal{H}(M) \subset M$. □

Def 3.9 (Kompaktheit)

Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ heißt <u>kompakt</u> (bzw. <u>folgenkompakt</u>), wenn jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

<u>Bsps</u>:

- Die abgeschlossene Kugel $\overline{K_r(a)}$ ist kompakt
- jede endliche Menge ist kompakt.

Satz 3.4 (Kompaktheit, Heine-Borel)

Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) M ist folgen-kompakt (vgl. Def 3.9.)

(ii) M ist beschränkt und abgeschlossen

(iii) Jede offene Überdeckung $\{\omega_i, i \in J\}$ von M, d.h. $\omega_i \subset \mathbb{K}^n$ offen und $M \subset \bigcup_{i \in J} \omega_i$ (J - bel. Indexmenge), enthält eine endliche Überdeckung, d.h. $M \subset \bigcup_{j=1,\dots,m} \omega_{i_j}$ (Überdeckungseigenschaft von Heine und Borel)

Bw.:

Wir gehen wie folgt vor:

$$\begin{array}{ccc} (i) & \Longleftrightarrow & (ii) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & (iii) & \end{array}$$

(i) => (ii):

Die Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ sei folgenkompakt. Dann ist M auch abgeschlossen, denn jede konvergente Folge in M hat wegen der Kompaktheit eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M, d.h. auch der Grenzwert der ~~g~~ gesamten Folge liegt in M. (Also abgeschlossen gezeigt)
M muß auch beschränkt sein, weil es sonst eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit $\|x_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ gäbe, die dann keine konvergente Teilfolge haben kann.

(ii) => (i):

Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ beschränkt und abgeschlossen, dann besitzt diese Menge nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (vgl. Satz 3.1) eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert dann wegen der angenommenen Abgeschlossenheit von M ebenfalls in M liegt

=> M ist folgen-kompakt.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Die Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ besitze die Überdeckungseigenschaft. Wir wollen zeigen, daß sie dann auch folgen-kompakt ist.

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M und $A := \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$.

Ist A endlich so hat die Folge notwendigerweise eine konstante (und damit konvergente) Teilfolge.

Sei A also unendlich.

Angenommen A hat keine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M. Dann hat jeder Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U(a)$, die nur endlich viele Punkte von A enthält.

Diese Umgebungen $U(a)$ bilden nun eine offene Überdeckung von M, zu der es lt. Annahme eine endliche Teilüberdeckung $\{U(a), k = 1, \dots, m\}$ gibt. Diese Teilüberdeckung kann dann auch nur endlich viele Punkte von A enthalten, d.h. A ist dann endlich, was im Widerspruch zur Annahme steht und somit A doch eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

(ii) => (iii):

Sei M beschränkt und abgeschlossen.

Sei $\{\omega_i, i \in J\}$ eine offene Überdeckung von M, die keine endliche Überdeckung von M enthält. Als beschränkte Menge ist M in einem abgeschlossenen Würfel Q_0 mit Kantenlänge L enthalten. Wir zerlegen Q in 2^n Würfel der halben Kantenlänge. Dann gilt auch für mindestens einen dieser Teilwürfel Q_1, daß $M \cap Q_1$ nicht von endlich vielen der ω_j überdeckt wird.

Die rekursive Wiederholung dieses Verfahrens gibt uns eine Folge abgeschlossener Würfel Q_k mit Kantenlänge $L_k = 2^{-k} L$, so daß $\ldots \subset Q_k \subset Q_{k-1} \subset \ldots \subset Q_0$, bei der keine dieser Mengen $M \cap Q_k$ durch endlich viele ω_i überdeckt werden.

Wir wählen uns dann in jeder dieser Mengen $M \cap Q_k$ einen Punkt x_k.

Nach Konstruktion der Würfelfolge ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit konvergent gegen ~~x~~ einen Punkt $x \in M$.
Dieser Grenzwert liegt dann aber auch in einer der offenen Überdeckungsmengen ω_j. Diese muß dann auch fast alle der Durchschnitte $M \cap Q_k$ enthalten. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, daß keiner dieser Durchschnitte von endlich vielen der ω_j überdeckt wird.

„Uff....?" $\square$

<u>Korollar 3.2:</u>

Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge in $\mathbb{K}^n$ ist ebenfalls kompakt.

<u>Bw.:</u> Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ kompakt und $A \subset M$ abgeschlossen. Nach Satz 3.4 ist M (und somit auch A) beschränkt. Also ist wieder nach Satz 3.4. A auch kompakt.