4. Funktionen im $\mathbb{R}^n$

Analysis I:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Stetigkeit
- gleichmäßige Stetigkeit
- Lipschitz-Stetigkeit

$\longrightarrow$

Analysis II:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Stetigkeit
- gleichmäßige Stetigkeit
- Lipschitz-Stetigkeit

Was ist neu?

- f hängt von mehreren Variablen ab (oder einer Vektor-Variablen)
- Die Werte von f sind nicht skalar, sondern (möglicherweise) Vektoren

$\Rightarrow$ statt Beträgen $|\cdot|$ jetzt Normen $\|\cdot\|$ als Abstandsbegriff
statt Intervallen $[x-\delta, x+\delta]$ jetzt Kugeln $K_\delta(x)$ $[\,\cdot\,]$ $\to$ $(\cdot)$

Bsp: $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x \in D$ $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in [x-\delta, x+\delta]:$
$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$

4.1 Stetigkeit

Def 4.1.1 (Stetigkeit)

Eine Funktion $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig in $x \in D$, falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D gilt:

$$\underbrace{x_k \to x}_{\text{Konvergenz in } \mathbb{R}^n} \Rightarrow \underbrace{f(x_k) \to f(x)}_{\text{Konvergenz in } \mathbb{R}^m}$$

Unterschied zu Ana I: Interpretation des Konvergenzbegriffs „$\to$"

Bem: • D braucht nicht offen zu sein (x kann auch im Rand ∂D liegen)
• Ist $M \subset D$ und $f: D \to \mathbb{R}^m$ stetig, so ~~ist~~ ist auch $f: M \to \mathbb{R}^m$ stetig

Satz 4.1.2 $f: D \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $x \in D$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in K_\delta(x) \cap D: \|f(y) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Unterschied zu Ana I: Kugeln statt Intervallen
Normen statt Beträgen

Bew (genauso wie in Ana I)

~~„⇒" sei f stetig in $x \in D$~~

„⇐" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in D mit $x_n \to x$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert dann $\delta > 0$ und $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $\underbrace{\|x_n - x\| \le \delta}_{x_n \in K_\delta(x)}$ f.a. $n \ge N$ und $\|f(x_n) - f(x)\| \le \varepsilon$. Also

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\delta \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N : \|f(x_n) - f(x)\| \le \varepsilon \iff f(x_n) \to f(x).$$

„⇒" Wir zeigen die Kontraposition

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists y \in K_\delta(x) \cap D : \|f(y) - f(x)\| > \varepsilon \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \left(\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } (x_n \to x \wedge f(x_n) \not\to f(x)\right)$$

Sei also ε aus $(*)$. Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert $\underbrace{x_n \in K_{1/n}(x) \cap D}_{\Rightarrow x_n \to x}$ mit $\underbrace{\|f(x_n) - f(x)\| > \varepsilon}_{f(x_n) \not\to f(x)}$.

$\square$

Bsp: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig, denn mit $x_k \to x$ gilt

$\|x_k\| \ge \|x\|$: $$\big|\|x_k\| - \|x\|\big| = \|x_k - x + x\| - \|x\| \le \|x_k - x\| + \|x\| - \|x\| = \|x_k - x\| \to 0$$

andernfalls $\|x\| > \|x_k\|$: $$\big|\|x\| - \|x_k\|\big| = \|x - x_k + x_k\| - \|x_k\| \le \|x - x_k\| + \|x_k\| - \|x_k\| = \|x - x_k\| \to 0$$

Satz 4.1.3

Sind $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig (in $x \in D$),
so auch $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ und (falls $g(x) \neq 0$) f/g.

Sind $f : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stetig, so
auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$.

[Beweis analog zu Ana I].

Satz 4.1.4

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig mit $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.
Dann ist f beschränkt: $\|f(x)\| \leq M \quad \forall x \in D$
Im Fall $m = 1$ nimmt f auf D Maximum und Minimum an.

Bew $g := \|\cdot\| \circ f$ ist nach Satz 4.1.3 stetig. Ist g nicht beschränkt, so gibt es $x_k \in D$ mit $g(x_k) = k$ (nicht konvergent). Wegen D kompakt existiert aber eine konvergente Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, wegen g stetig konvergiert dann $g(x_{k_i})$ $\lightning$.
Annahme der Extrema wie in Ana I. $\square$

Satz 4.1.5

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig auf $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.
Dann ist f gleichmäßig stetig:

~~$\exists \delta > 0 \ \forall \varepsilon$~~ $\forall \varepsilon > 0, x \in D : \exists \delta > 0 \ \forall y \in K_\delta(x) : \|f(y) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

[Bew. analog zu Ana I]

[Stetigkeit ist mit der Topologie (offene Mengen) eng verknüpft]

Satz 4.1.6 Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann gilt:

(i) Das Urbild $f^{-1}(O)$ einer offenen Menge $O \subset \mathbb{R}^m$ ist offen.

(ii) Das Urbild $f^{-1}(A)$ eines abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ ist abgeschlossen

(iii) Das Bild eines kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Bew

(i) Sei $x \in f^{-1}(O)$, also $f(x) \in O$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(f(x)) \subset O$. Zu diesem ε (und x) existiert wg. Stetigkeit von f ein $\delta > 0$ mit $\forall y \in K_\delta(x): \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, also $f(y) \in K_\varepsilon(f(x)) \subset O$. Damit gilt $K_\delta(x) \subset f^{-1}(O)$, also ist $f^{-1}(O)$ offen. [Falls $f^{-1}(O) = \emptyset$, so ist Offenheit klar.]

(ii) Ist ~~$f^{-1}(A)$~~ A abgeschlossen, so ist $\mathbb{R}^m \setminus A$ offen, also $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus A)$ offen nach (i). Nun gilt $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus A) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A)$ offen, dann ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(iii) Sei $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Nach (i) ist $\{f^{-1}(O_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von K.

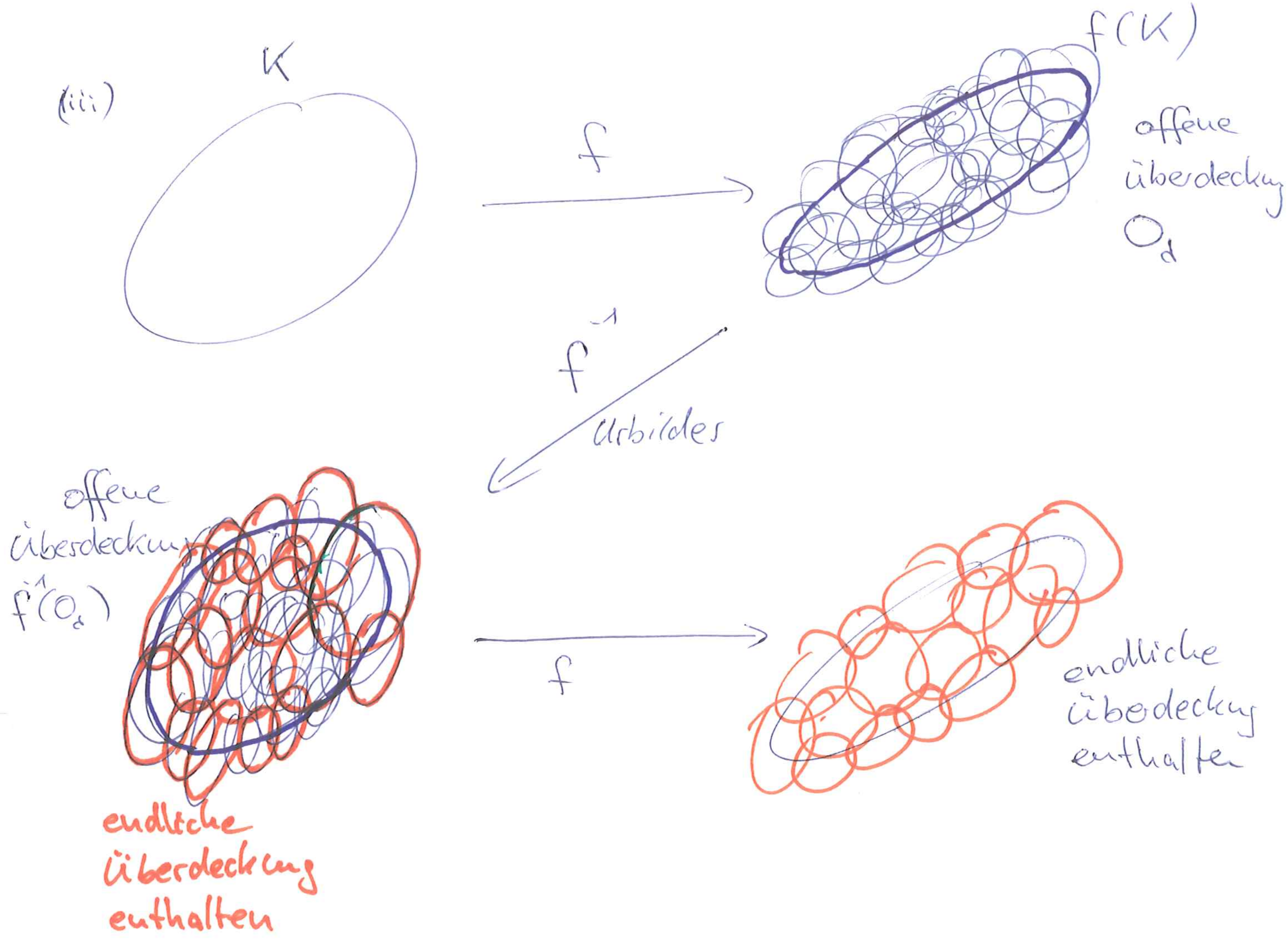
[Offen ist klar. Überdeckung: $x \in K \Rightarrow f(x) \in O_\alpha$ für ein $\alpha \in \Lambda$ (Überdeckung) $\Rightarrow x \in f^{-1}(O_\alpha)$]

Nach Satz 3.4 (Heine-Borel) existiert eine <u>endliche</u> Überdeckung $\{f^{-1}(O_{\alpha_i})\}_{i=1,\dots,k}$ von K. Dann ist $\{O_{\alpha_i}\}_{i=1,\dots,k}$ eine Überdeckung von $f(K)$. Nach 3.4 ist $f(K)$ kompakt.

(i)

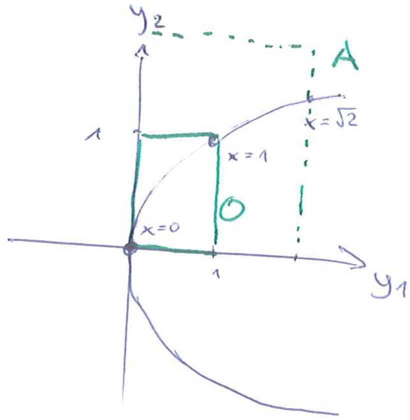

O
x
$K_\delta(x)$
f
f(O)
$K_\varepsilon(f(x))$
f(x)
$f(K_\delta(x))$

(iii)


K
f
f(K)
offene
überdeckung
O_d
f^{-1}
Urbildes
offene
überdeckung
$f^{-1}(O_d)$
endliche
überdeckung
enthalten
f
endliche
überdeckung
enthalten

Bsp • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix}$

Darstellung:



$O =]0,1[^2 \Rightarrow f^{-1}(O) =]0,1[$ offen

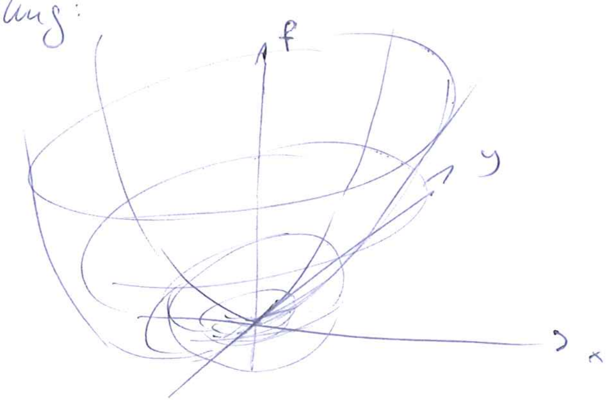
Achtung: Umkehrung gilt nicht!

$]0,1[$ offen, aber $f(]0,1[)$ nicht offen

$A = [0,2]^2 \Rightarrow f^{-1}(A) = [0,\sqrt{2}]$ abgeschlossen

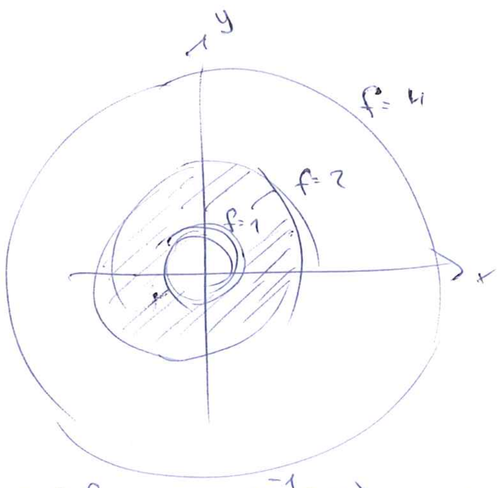
• $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2$

Darstellung:



(Funktionsgraph)

oder



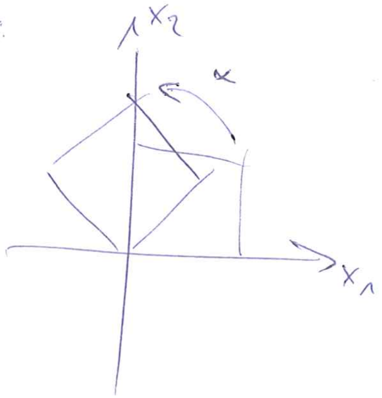
(Höhenlinien)

$O =]1,2[\Rightarrow f^{-1}(O) = K_2(0) \setminus \overline{K_1(0)}$

$A = [1,2] \Rightarrow f^{-1}(A) = \overline{K_2(0)} \setminus K_1(0)$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} x \qquad \begin{matrix} c = \cos\alpha \\ s = \sin\alpha \end{matrix}$

Darstellung:



4.2 Nichtlineare Gleichungen und Fixpunkte

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Zu $b \in \mathbb{R}^n$ ist gesucht die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = b$.

[Frage: warum $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ statt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?]

Existiert eine Lösung? Ist sie eindeutig? Wie kommt man daran?

I.a. existiert keine geschlossene Darstellung $x = f^{-1}(b)$

$\to$ konvergente Folge von Näherungen konstruieren.

$$f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x - \sigma(f(x) - b)}_{=: g(x)} = x$$

Fixpunkt von g suchen

Def 4.2.1 (Fixpunkt)

Sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Gilt für $x \in D$: $f(x) = x$, so heißt x Fixpunkt von f.

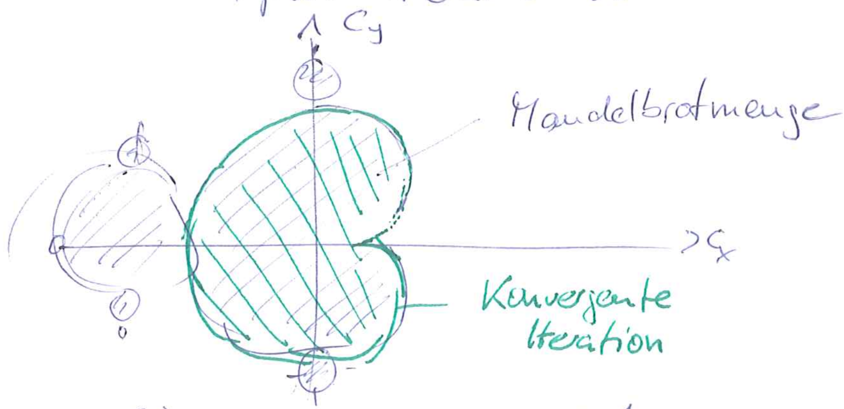
Idee: Rekursion $x_{n+1} = g(x_n)$. Ist f stetig, so auch g. Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, so konvergiert $g(x_n)$ gegen $g(x)$, wobei gilt $x = g(x)$, also ein Fixpunkt.

Aber: wann konvergiert die so konstruierte Folge?

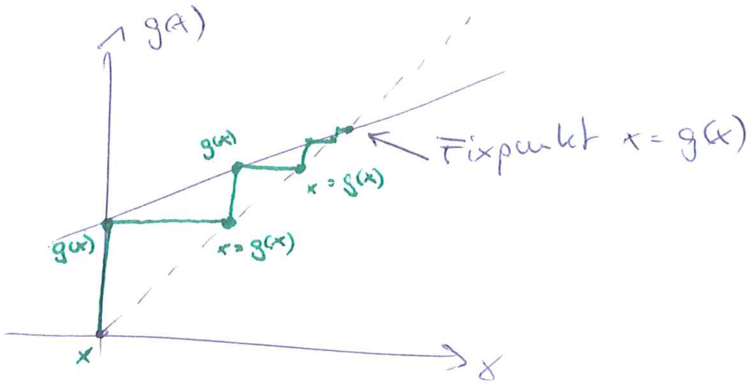
~~Def~~ Bsp:

- $g(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 + c_x \\ 2xy + c_y \end{bmatrix}$

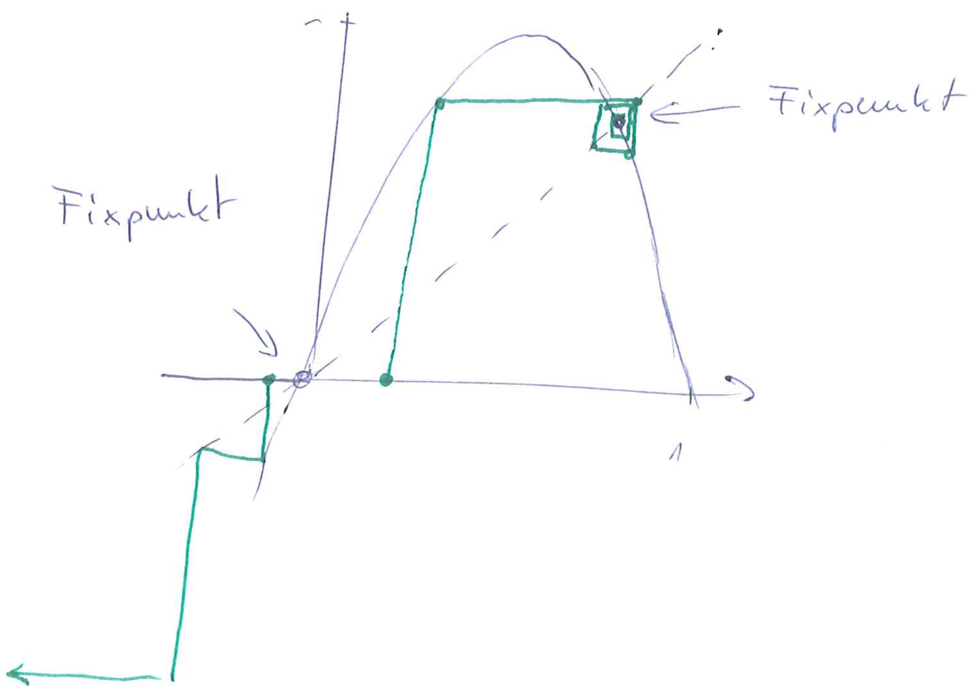
Für welche $[c_x, c_y]^T \in \mathbb{R}^2$ konvergiert die Fixpunktiteration von 0 aus?



- $g(x) = 1 + x/2$ in $\mathbb{R}^1$



- $g(x) = 3x(1-x)$



Def 4.2.2 $g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt Lipschitz-stetig (mit Konstante L), falls gilt

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L \|x-y\| \quad \text{f.a. } x, y \in D.$$

Für $m=n$ und $L<1$ heißt g Kontraktion bezüglich $\|\cdot\|$.

Satz 4.2.3 (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $g: D \to D$ eine Kontraktion mit Konstante $0 \leq q < 1$.
Dann besitzt g genau einen Fixpunkt x_* und für jeden Startpunkt $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

gegen x_*. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x_1 - x_0\|$$

Bew (i) Eindeutigkeit: Sind $x, \hat{x}$ zwei Fixpunkte, so gilt $\|x-\hat{x}\| = \|g(x) - g(\hat{x})\| \leq q\|x-\hat{x}\|$, was wegen $q<1$ gerade $\|x-\hat{x}\| = 0$ impliziert.

(ii) Existenz: Da g D auf sich selbst abbildet, sind alle Iterierten wohldefiniert.

Wir zeigen, daß $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.