

Zunächst betrachten wir

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|g(x_k) - g(x_{k-1})\| \leq q \|x_k - x_{k-1}\| \leq q^k \|x_1 - x_0\|$$

Sei nun $k \geq j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_j\| &\leq \sum_{i=j}^k \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=j}^k q^i \|x_1 - x_0\| \\ &\leq q^j \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{\infty} q^i \\ &= q^j \frac{\|x_1 - x_0\|}{1-q} \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge mit Grenzwert x_* .

Wegen Stetigkeit von g gilt $x_* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = g(x_*)$,
also ist x_* Fixpunkt von g .

$$\text{Es gilt } \|x_* - x_k\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x_1 - x_0\|.$$

□

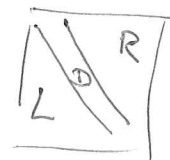
Bsp lineare Gleichungssysteme

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ strikt diagonaldominant, also

$$|A_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |A_{ik}|.$$

Dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung.

Jacobi-Iteration: $A = D + L + R$



$$Ax = b \Leftrightarrow Dx = b - (L+R)x$$

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{D^{-1}b - D^{-1}(L+R)x}_{g(x)}$$

Es gilt mit $G := D^{-1}(L+R)$ für alle Zeilen G_i : $\|G_i\|_1 < 1$
Dann ist $\|Gx\|_\infty = \max_i |G_i x| \leq \max_i \|G_i\|_1 \cdot \|x\|_\infty < \|x\|_\infty$,
also ist g eine Kontraktion. □

Was Sie verstanden haben müssen:

- Stetigkeit wie in Ana I: $\varepsilon/\delta \Leftrightarrow$ Folgenstetigkeit
- gleichmäßige & Lipschitz - Stetigkeit wie in Ana I
- Stetigkeit ist eng mit Topologie verknüpft
- Satz von Banach $\rightarrow$ Existenz von Fixpunkten & Konvergenz von Fixpunktiterationen

Was Sie wissen müssen:

- Definitionen von Stetigkeitsbegriffen
- Voraussetzungen des Satzes von Banach (Kontraktion, Selbstabbildung)