5. Differentialrechnung für Funktionen und Abbildungen in mehreren Variablen

Bild 5.1:

Partielle Ableitung (Steigung) im Punkt $\tilde{x}$ in Koordinatenrichtung x_1

Bild 5.2:

Partielle Ableitung (Steigung) im Punkt $\tilde{x}$ in Koordinatenrichtung x_2.

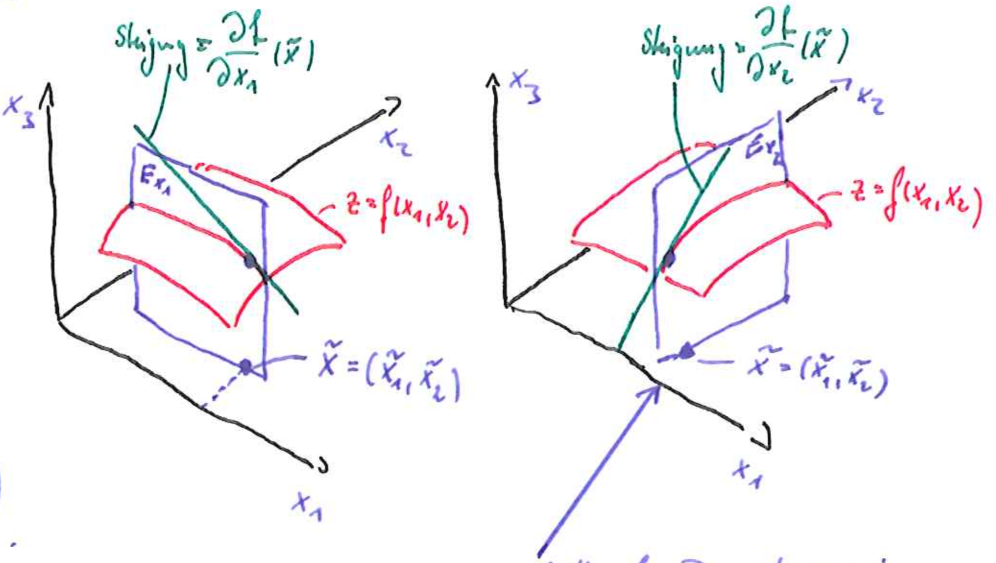


Bild 5.1 + 2

hätte der Dozent sein Lineal früher gefunden, wäre diese Linie gerade...

5.1. Partielle und totale Ableitung

Def 5.1.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt in einem Punkt $x \in D$ partiell differenzierbar bzgl. der i-ten Koordinatenrichtung ($e^{(i)}$ - entspr. kart. Richtungsvektor), falls Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + he^{(i)}) - f(x)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =: \partial_i f(x) =: f_{x_i}(x)$$

existiert, dieser heißt dann partielle Ableitung bzgl. x_i von f in x. Existieren in allen Punkten $x \in D$ alle partiellen Ableitungen so heißt f partiell differenzierbar, und stetig partiell differenzierbar falls alle partiellen Ableitungen stetige Funktionen auf D sind.

Eine vektorwertige Funktion $f = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ heißt (stetig) partiell differenzierbar, wenn alle ihre Komponenten f_i (stetig) partiell differenzierbar sind.

Bem. 5.1:

Wir können die uns bisher bekannte „gewöhnliche" Ableitung wiederfinden. Im Bild 5.1 und 5.2 betrachte man dazu die Funktion $f(x_1, x_2)$ entlang der Ebene E_{x_1} bzw. E_{x_2}.

Allgemein: $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ und halte nun alle i-te Argument fest; dann:

$$\hat{f}(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

d.h. $\hat{f}(t)$ ist nur von t abhängig, die i-te partielle Ableitung ist dann die gewöhnliche Ableitung in t:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{d\hat{f}}{dt}(t).$$

Deshalb können wir folgende Regeln übertragen:

Produktregel:

$$\partial_i (fg) = g\,\partial_i f + f\,\partial_i g$$

Quotientenregel:

$$\partial_i \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\partial_i f - f\,\partial_i g}{g^2} .$$

Kettenregel (einfach)

Sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell diff'bar und $F: I \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset I$ differenzierbar dann gilt:

$$\partial_i F(f(x)) = F'(f(x))\,\partial_i f(x), \quad x \in D.$$

Bsps.: 5.1:

(a) quadratisches Polynom $p(x) = a_{20} x_1^2 + 2a_{11} x_1 x_2 + a_{02} x_2^2 + a_{10} x_1 + a_{01} x_2 + a_{00}$ (auf ganz $\mathbb{R}^n$ stetig partiell diff'bar) mit partiellen Ableitungen

$$\partial_1 p(x) = 2a_{20} x_1 + 2a_{11} x_2 + a_{10} \quad , \quad \partial_2 p(x) = 2a_{11} x_1 + 2a_{02} x_2 + a_{01}$$

(b) $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 x_2^2 + 2x_2 + 4x_1$

$$\partial_1 f(x) = 6x_1^2 x_2^2 + 4 \quad , \quad \partial_2 f(x) = 4x_1^3 x_2 + 2$$

(c) Abstandsfunktion

$$r(x) := \|x\|_2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

$r(x)$ ist in $D = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_i r(\dots, x_i, \dots) = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{(\dots + x_i^2 + \dots)^{1/2}} = \frac{x_i}{r(x)}$$

Partielle Differenzierbarkeit bedingt nicht notwendigerweise die Stetigkeit. Was ist aber, wenn wir noch zusätzlich die Beschränktheit fordern!

Die Antwort bringt:

<u>Satz 5.1.</u>

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ habe in einer Kugelumgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ beschränkte partielle Ableitungen, also

$$\sup_{x \in K_r(x)} |\partial_i f(x)| \le M , \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann ist f stetig im Punkt x.

Bew.: Wir betrachten nur $n=2$ und überlassen $n>2$ dem Leser. Es gilt für $y = (y_1, y_2) \in K_r(x)$:

$$f(y_1,y_2) - f(x_1,x_2) = f(y_1,y_2) \underbrace{- f(x_1,y_2) + f(x_1,y_2)}_{=0} - f(x_1,x_2) ,$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ex. Zwischenstellen $\xi = \xi(y_2)$, $\eta = \eta(x_1)$ zwischen x_1 und y_1 bzw. x_2 und y_2 s.d.

$$f(y_1,y_2) - f(x_1,x_2) = \partial_1 f(\xi, y_2)(y_1 - x_1) + \partial_2 f(x_1,\eta)(y_2 - x_2).$$

Wegen der geforderten Beschränktheit der partiellen Ableitungen in $K_r(x)$ folgt

$$|f(y_1,y_2) - f(x_1,x_2)| \le M(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) ,$$

Für bel. $\varepsilon \in (0, r]$ gilt also $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für $\|x - y\|_1 := \frac{\varepsilon}{M}$

d.h. f ist stetig in x (sogar Lipschitz-stetig). $\square$

Wir betrachten nun folgende Funktion auf $\mathbb{R}^2$

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1 x_2 \cdot \dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2} & \text{falls } (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0 & \text{falls } (x_1,x_2)=(0,0) \end{cases}$$

Es ist

$$\partial_1 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-0}{h}=0 \quad \text{und} \quad \partial_2 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-0}{h}=0$$

und mit $(x_1,x_2)\neq(0,0)$: (nachrechnen!)

$$\partial_1 f(x_1,x_2)=x_2\cdot\frac{x_1^4+4x_1^2x_2^2-x_2^4}{(x_1^2+x_2^2)^2} \; ; \; \partial_2 f(x_1,x_2)=x_1\cdot\frac{x_1^4-4x_1^2x_2^2-x_2^4}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

und für $(x_1,x_2)\neq(0,0)$ ist:

$$\partial_1\partial_2 f(x_1,x_2)=\partial_2\partial_1 f(x_1,x_2)=\frac{(x_1^2-x_2^2)(x_1^4+10x_1^2x_2^2+x_2^4)}{(x_1^2+x_2^2)^3}$$

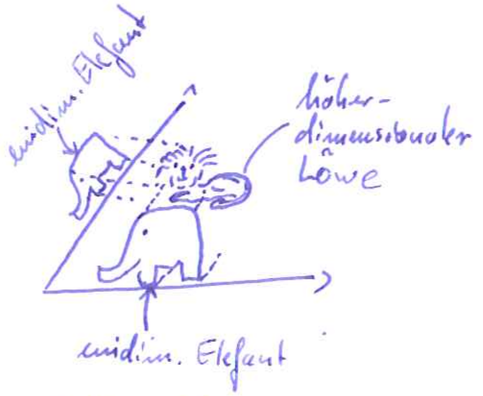
... alles sieht soweit gut aus, jedoch

$$\partial_1\partial_2 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h\cdot\frac{-h^4}{(h^2)^2}\right)=-1$$

Hmm....

$$\partial_2\partial_1 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h\cdot\frac{h^4}{(h^2)^2}\right)=1$$

... und Rettung naht ...



... beim Schlussfolgern von 1-dim. Objekten auf höhere Dimensionen können Fehler entstehen ...

Satz 5.2: (Satz von Schwarz)

Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes x zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x), \quad i,j = 1,\dots,n$$

Allgemein ist für eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar.

Bew.:

Wir zeigen nur $n = 2$:

Setze $A := f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1, x_2+h_2) + f(x_1, x_2)$

und $\varphi(x_1) := f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2)$.

Dann ist

$$A = \varphi(x_1+h_1) - \varphi(x_1).$$

Bis jetzt ist noch nicht viel passiert, wir haben nur abgekürzt bzw. umgeschrieben.

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung bzgl. x_1 erhalten wir

$$A = h_1\,\varphi'(x_1+\vartheta_1 h_1), \quad \vartheta_1 \in (0,h_1).$$

Wegen $\varphi'(x_1) = \partial_1 f(x_1,x_2+h_2) - \partial_1 f(x_1,x_2)$ folgt wieder mit dem Mittelwertsatz, diesmal jedoch für x_2:

$$\varphi'(x_1) = h_2\,\partial_2\partial_1 f(x_1,\, x_2+\tilde{\vartheta}_1 h_2), \quad \tilde{\vartheta}_1 \in (0,h_1).$$

Daraus folgt

$$\varphi'(x_1+\vartheta_1 h_1) = h_2\,\partial_2\partial_1 f(x_1+\vartheta_1 h_1,\, x_2+\tilde{\vartheta}_1 h_2)$$

und somit ist

$$A = h_1 h_2\,\partial_2\partial_1 f(x_1+\vartheta_1 h_1,\, x_2+\tilde{\vartheta}_1 h_2).$$

Wir verfahren analog mit x_2 und erhalten für $\psi(x_2) := f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1,x_2)$:

$$A = \psi(x_2+h_2) - \psi(x_2) = h_2\,\psi'(x_2+\vartheta_2 h_2) = h_1 h_2\,\partial_1\partial_2 f(x_1+\vartheta_2 h_1,\, x_2+\tilde{\vartheta}_2 h_2).$$

Damit wird

$$\partial_2\partial_1 f(x_1+\vartheta_1 h_1,\, x_2+\tilde{\vartheta}_1 h_2) = \frac{A}{h_1 h_2} = \partial_1\partial_2 f(x_1+\vartheta_2 h_1,\, x_2+\tilde{\vartheta}_2 h_2)$$

Wegen der Stetigkeit von $\partial_1\partial_2 f$ und $\partial_2\partial_1 f$ in $K_r(x)$ gilt für $h_1, h_2 \to 0$:

$$\partial_2\partial_1 f(x_1,x_2) = \partial_1\partial_2 f(x_1,x_2).$$

Die zweite Aussage läßt sich durch Induktion über k zeigen, worauf wir hier verzichten wollen. $\square$

und nun kommen ein paar wichtige Definitionen, die wir brauchen werden

<u>Def 5.2 (Gradient)</u>

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: D \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Der Vektor der ersten partiellen Ableitungen

$$\operatorname{grad} f(x) := \nabla f(x) := (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$$

heißt der <u>Gradient</u> von f in $x \in D$. Das „∇" nennt man „<u>Nabla-Operator</u>" (vektorieller Differentialoperator 1. Ordnung)

$$\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n).$$

Def 5.3: (Jacobi-Matrix)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: D \to \mathbb{R}^m$ eine partiell differenzierbare Vektorfunktion. Die Matrix der ersten partiellen Ableitungen

$$J_f(x) := \left(\partial_j f_i(x)\right)_{\substack{i=1\\ j=1}}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

heißt Jacobi-(oder auch Funktional-) Matrix von f im Punkt $x \in D$.

Im Fall $m = n$ wird die Determinante $\det J_f(x)$ von $J_f(x)$ auch Jacobi- bzw. Funktionaldeterminante genannt. (Man schreibt auch $J_f(x) = \nabla f(x) = f'(x)$

Def 5.4 (Hesse-Matrix)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: D \to \mathbb{R}$ eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$H_f(x) := \left(\partial_i \partial_j f(x)\right)_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt Hessematrix von f im Punkt $x \in D$. Man schreibt auch

$H_f(x) = \nabla^2 f(x)$.

Def 5.5 (Divergenz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $v: D \to \mathbb{R}^n$ eine partiell differenzierbare Abbildung. Die skalare Funktion

$$\operatorname{div} v(x) := \partial_1 v_1(x) + \dots + \partial_n v_n(x)$$

heißt die Divergenz von v im Punkte $x \in D$.

Mit dem Nabla-Operator kann man auch

$$\operatorname{div} v(x) = \nabla \cdot v(x)$$

schreiben.

Bsp. zu den Def 5.2 - 5.5 werden wir in der VL behandeln.