5.2. Totale Differenzierbarkeit

Def 3.7:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir nennen eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in D$ total Differenzierbar, wenn sie im Punkt x linear approximierbar ist, d.h. wenn es eine lineare Abbildung $D_f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (das sog. Differential von f) gibt, s.d. in einer Umgebung von x gilt

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \omega(h), \quad h \in \mathbb{R}^n, x+h \in D$$

mit einer Funktion $\omega: D \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\substack{x+h \in D \\ \|h\|_2 \to 0}} \frac{\|\omega(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0. \qquad (*)$$

$(*)$ wird auch abgekürzt $\omega(h) = o(\|h\|_2)$ geschrieben.

Betrachten wir mal den Fall $n=2$, $m=1$.

Für ein differenzierbares f gilt mit $i=\{1,2\}$

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{f(x+he^{(i)})-f(x)}{h_i} = \lim_{h_i \to 0} \left(Df(x)e^{(i)} + h_i^{-1}\omega(h_i)\right) = Df(x)e^{(i)}$$

aha, es gilt also (allgemeiner)

Satz 5.3

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^m$. Ist f in $x \in D$ differenzierbar, so ist es auch in x partiell differenzierbar und das Differential von f ist gerade die Jacobi-Matrix.

Bem. 5.2

(i) Man kann auch zeigen: ~~daß~~ wenn die part. Ableitungen in x existieren und stetig sind, so ist f auch in x differenzierbar

(ii) Es gilt also

$\boxed{\text{stetig partiell differenzierbar}} \Rightarrow \boxed{\text{(total) differenzierbar}} \Rightarrow \boxed{\text{partiell differenzierbar}}$

Bisher haben wir immer nur in Koordinatenrichtungen die Ableitungen gebildet, es geht aber auch allgemeiner

__Satz 5.4 (Richtungsableitung)__

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in D$ differenzierbar. Dann ex. für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$ die Ableitung in Richtung v:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

und läßt sich schreiben als

$$\partial_v f(x) := \frac{\partial f}{\partial v}(x) = Df(x) \cdot v$$

__Bw.:__ Übung

Satz 5.5 (Kettenregel)

Seien $M_f \subset \mathbb{R}^n$, $M_g \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, und $g: M_g \to \mathbb{R}^n$ und $f: M_f \to \mathbb{R}^r$ Abbildungen.

Ist die Abbildung g im Punkt $x \in M_g$ und die Abbildung f im Punkt $y = g(x) \in M_f$ differenzierbar, so ist die Komposition $h = f \circ g$ im Punkt x differenzierbar und für die Differentiale gilt

$$D_x h(x) = D_y f(g(x)) \cdot D_x g(x).$$

Dabei ist $D_x h(x) \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $D_y f(y) \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $D_x g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und der Punkt „$\cdot$“ steht für die entsprechende Matrix-Matrix Multiplikation.