

## 5.2. Totale Differenzierbarkeit <sup>①</sup>

### Def 3.7:

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Wir nennen eine

Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $x \in D$  total

Differenzierbar, wenn sie im Punkt  $x$  linear

approximierbar ist, d.h. wenn es eine lineare

Abbildung  $D_f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (das sog. Differential

von  $f$ ) gibt, s.d. in einer Umgebung von  $x$  gilt

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \omega(h), \quad h \in \mathbb{R}^n, x+h \in D$$

mit einer Funktion  $\omega: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\lim_{\substack{x+h \in D \\ \|h\|_2 \rightarrow 0}} \frac{\|\omega(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0. \quad (*)$$

(\*) wird auch abgekürzt  $\omega(h) = o(\|h\|_2)$  geschrieben.

(2)

Betrachten wir mal den Fall  $n=2, m=1$ .

Für ein differenzierbares  $f$  gilt mit  $i=\{1,2\}$

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x + h e^{(i)}) - f(x)}{h_i} = \lim_{h_i \rightarrow 0} (Df(x) e^{(i)} + h_i^{-1} \omega(h_i)) = Df(x) e^{(i)}$$

aha, es gilt also (allgemein)

### Satz 5.3

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ist  $f$  in  $x \in D$

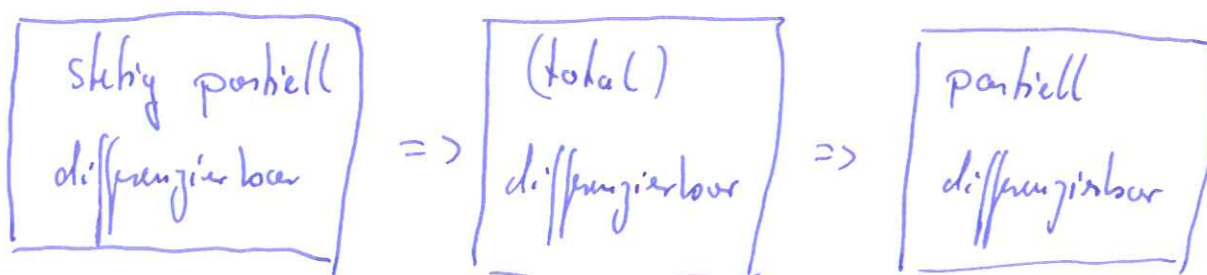
differenzierbar, so ist es auch in  $x$  partiell differenzierbar und das Differential von  $f$  ist gerade die Jacobi-Matrix.

### Bem. 5.2

(i) Man kann auch zeigen: ~~daß~~ wenn die part. Ableitungen in  $x$  existieren und stetig sind, so ist  $f$  auch in  $x$  differenzierbar

(3)

(ii) Es gilt also



Bisher haben wir immer nur in Koordinatenrichtungen die Ableitungen gebildet, es geht aber auch allgemeiner

### Satz 5.4 (Richtungsableitung)

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  in Punkt  $x \in D$  differenzierbar. Dann ex. für jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\|_2 = 1$  die Ableitung in Richtung  $v$ :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

und lässt sich schreiben als

$$\partial_v f(x) := \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v$$

Bew.: Übung

(4)

Satz 5.5 (Kettenregel)

Seien  $M_f \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $M_g \subseteq \mathbb{R}^m$  offene Mengen, und  
 $g: M_g \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $f: M_f \rightarrow \mathbb{R}^r$  Abbildungen.

Ist die Abbildung  $g$  im Punkt  $x \in M_g$  und die  
 Abbildung  $f$  im Punkt  $y = g(x) \in M_f$  differenzierbar,  
 so ist die Komposition  $h = f \circ g$  im Punkt  $x$   
 differenzierbar und für die Differentiale gilt

$$D_x h(x) = D_y f(y) \cdot D_x g(x).$$

Dabei ist  $D_x h(x) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $D_y f(y) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D_x g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$   
 und der Punkt „ $\cdot$ “ steht für die entsprechende  
 Matrix-Matrix Multiplikation.