5.3 Taylor-Reihen

Ana I: f $m+1$-mal stetig diffbar

$$\Rightarrow f(x+h) = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(x) \frac{h^k}{k!} + f^{(m+1)}(\xi) \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}$$

Übertragung in mehr Dimensionen: $x, h \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f\left(x + t \frac{h}{\|h\|}\right), \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

[Einschränkung von f auf Gerade durch x]

$$\Rightarrow f(x+h) = g(\|h\|) = \sum_{k=0}^{m} g^{(k)}(0) \frac{\|h\|^k}{k!} + g^{(m+1)}(\xi) \frac{\|h\|^{m+1}}{(m+1)!}$$

höhere Richtungsableitungen!

$$g^{(1)}(0) = g'(0) = \partial_{\frac{h}{\|h\|}} f(x) = \nabla f(x) \cdot \frac{h}{\|h\|} \qquad \text{Skalarprodukt}$$

$$g^{(2)}(0) = \ldots = \frac{1}{\|h\|^2} h^T H_f(x) h \qquad \text{Vektor-Matrix-Vektor-Prod.}$$

$$g^{(3)}(0) = \quad ?? \qquad \text{Tensor 3. Stufe (dreidim. Array)}$$

Def 5.3.1 (Multiindex)

$\alpha \in \mathbb{N}^n$ heißt Multiindex. Wir schreiben

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{für } |\alpha|\text{-mal stetig differenzierbares } f.$$

[Wegen Stetigkeit ist $\partial^\alpha f$ wohldefiniert unabhängig von Reihenfolge der part. Ableitungen.]

Satz 5.3.2 (Taylor-Formel)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ eine $m+1$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + th \in D$ $\forall t \in [0,1]$:

[Analog für $f: D \to \mathbb{R}^k$]

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) + \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+sh)$$

für ein $s \in]0,1[$.

Beweis (Skizze)

1) zeige $g^k(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+th) h^\alpha$ für $g(t) = f(x+th)$

- Induktion über k
- Kettenregel: $\frac{d}{dt} \left[\partial^\alpha f(x+th) \right]$
- Kombinatorik

2) Satz von Taylor in $\mathbb{R}$ anwenden

□

Korollar 5.3.3

Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\left| f(x+h) - \left[f(x) + \nabla f(x) \cdot h \right] \right| \leq c \cdot \|h\|^2$$

Ist f dreimal stetig diff'bar, gilt

$$\left| f(x+h) - \left[f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \tfrac{1}{2} h^T H_f(x) h \right] \right| \leq c \cdot \|h\|^3 .$$

[Taylorreihen und Konvergenzaussagen aus $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ übertragbar, aber extrem unhandlich
→ beschränken auf erste & zweite Ableitung]

5.4 Extremwertaufgaben

Def 5.4.1 $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat in $x \in D$ offen ein (lokales) Maximum, falls eine Umgebung von x in D existiert, so daß

$$f(x) = \sup_{y \in U} f(y).$$

Das Maximum heißt strikt (eindeutig, isoliert), falls $f(y) < f(x)$ f.a. $y \neq x$, $y \in U$. Es heißt global, falls $f(x) = \sup_{y \in D} f(y)$.

[Analog: Minimum]

Bsp $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

Maximum bei $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, denn

$f(0,0) = 1$

$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \leq 1$

sogar $1 - x^2 - y^2 < 1$ für $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ striktes Maximum

x Maximierer $\Leftrightarrow$ horizontale Tangentialebene [Feynman: Kurvenlineal]

x Maximierer $\Leftrightarrow$ es giebt keine Anstiegsrichtung in x

$f(x + tv) > f(x)$ f.a. hinreichend kleine $t > 0$.

Taylor: $$f(x + t\nabla f(x)) = f(x) + t\nabla f(x) \cdot \nabla f(x) + \frac{t^2}{2} \nabla f(x)^T H_f(\xi) \nabla f(x)$$

$$\geq f(x) + \underbrace{t \, \|\nabla f(x)\|^2}_{\geq 0} - \frac{t^2}{2} c \cdot \|\nabla f(x)\|^2$$

klein sehr klein

$$\Rightarrow f(x + t\nabla f(x)) \geq f(x) + \frac{t}{2} \|\nabla f(x)\|^2$$ für hinreichend kleines t

Also x Maximierer $\Rightarrow \|\nabla f(x)\| = 0$

$\Leftrightarrow \nabla f(x) = 0$.

Satz 5.4.2 (Notwendige Extremalbedingung)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in D$ ein Maximierer. Dann gilt $\nabla f(x) = 0$.

Bsp $f(x,y) = (x^2+y^2)\exp(-(x^2+y^2))$

Wo liegen Maximierer und Minimierer?

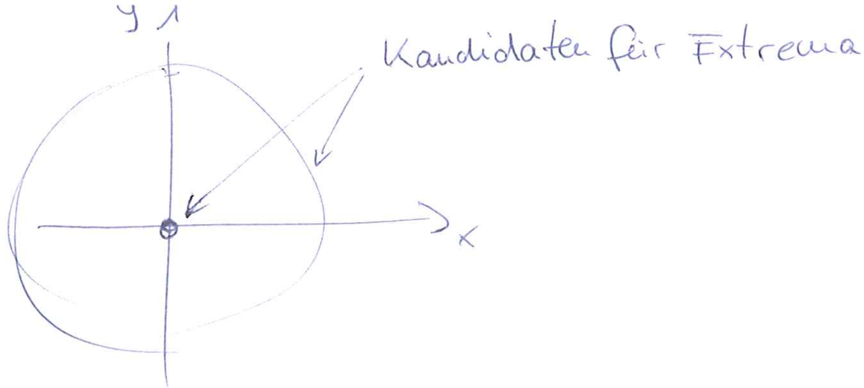
Kandidaten sind Punkte mit verschwindender Ableitung (totalem Differential) $f'(x,y) = Df(x,y)$

Kettenregel: $f(x,y) = g(r(x,y))$ mit

$$g(r) = r e^{-r}$$
$$r(x,y) = x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \quad f'(x,y) = g'(r(x,y)) \cdot r'(x,y)$$
$$= (e^{-r} - r e^{-r})\,[2x, 2y]$$
$$= 2e^{-r}(1-r)\,[x,y]$$

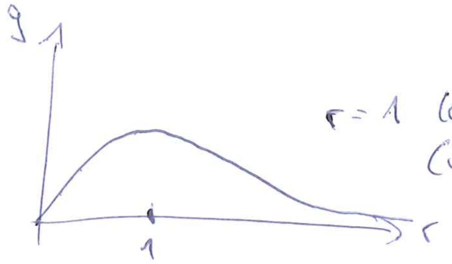
$$f'(x,y) = [0,0] \iff 1-r=0 \ \vee\ [x,y]=[0,0]$$
$$\iff x^2+y^2=1 \ \vee\ x=y=0$$



Offenbar gilt $f(0,0)=0$ und $f(x,y) \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ globaler Minimierer

$f(x,y) > 0$ für $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ isoliert



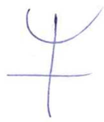
$r=1$ lokaler Maximierer (nicht isoliert)

Bsp $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy + 1$

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-3y, & 2y-3x \end{bmatrix}$$

$$f'(x,y) = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

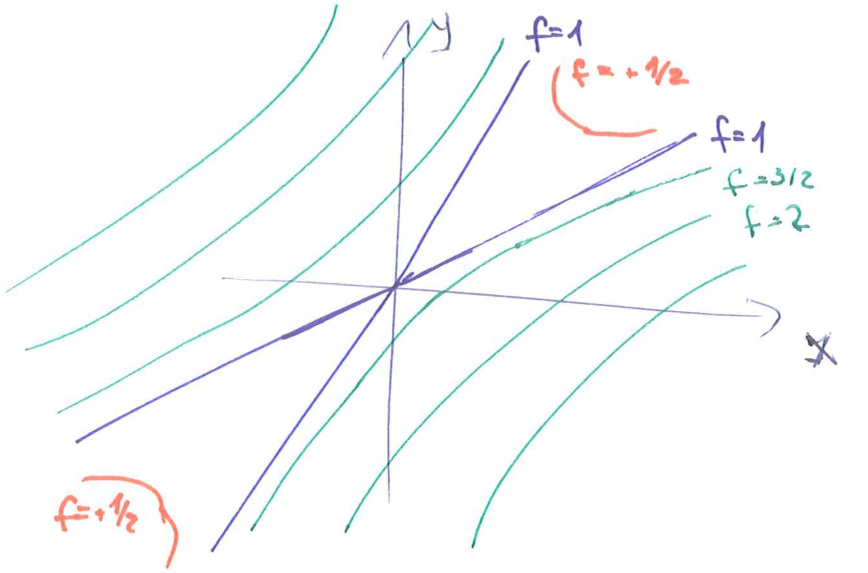
Ist $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Maximierer oder Minimierer?

$g(x) = f(x,0) = x^2 + 1$  Minimum in $x = 0$

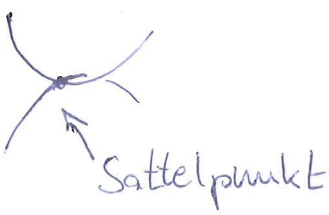
$h(y) = f(0,y) = y^2 + 1$ Minimum in $y = 0$

Aber: $s(t) = f(t,t) = -t^2 + 1$ Maximum in $t = 0$!

Höhenlinien von f:



Def 5.4.3 $f: D \to \mathbb{R}$. Ist $\nabla f(x) = 0$, so heißt x stationärer (kritischer) Punkt. Ist x weder Minimierer noch Maximierer, so heißt x Sattelpunkt.



[Unterscheidung von Maximal-/Minimal-/Sattelpunkten? Ana I: zweite Ableitung!]

Def 5.4.4 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.

- A heißt positiv definit, wenn gilt
$$\forall v \in \mathbb{R}^n_{\|v\|=1} : \quad v^T A v > 0$$
- A heißt negativ definit, falls $-A$ positiv definit ist
- A heißt indefinit, falls $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit
$$v^T A v < 0 < w^T A w$$
existieren

Satz 5.4.5 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist

- positiv definit, falls $\det A > 0 \wedge a > 0$
- negativ definit, falls $\det A < 0 \wedge a < 0$
- indefinit, falls $\det A < 0$

mit $\det A = ac - b^2$

Satz 5.4.6 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar auf $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und x stationäres Punkt.

Dann gilt:

(i) Ist $H_f(x)$ pos. def., so ist x striktes lokaler Minimieser

(ii) neg. def. Maximieser

(iii) indefinit., so ist x Sattelpunkt

Bew (i) Wegen Stetigkeit von H_f ist $H_f(x)$ pos. def. in einer Umgebung U von x. Dort gilt dann nach Satz v. Taylor 5.3.2

$$f(y) = f(x) + \underbrace{\nabla f(x) \cdot (y-x)}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{(y-x)^T H_f(\xi)(y-x)}_{>0}, \quad \xi \in U$$

$\Rightarrow$ ist strikter lokaler Minimieser

(ii) analog

(iii) Sei $v^T H_f(x) v < 0 < w^T H_f(x) w$. Wegen Stetigkeit gilt dies sogar für alle $\xi \in U$.

Dann gilt

$$f(x+tv) = f(x) + \underbrace{t\nabla f(x)\cdot v}_{=0} + \frac{t^2}{2}\underbrace{v^T H_f(x+\tau v)v}_{<0}, \quad \tau\in[0,t]$$

$$f(x+tw) = f(x) + \underbrace{t\nabla f(x)\cdot w}_{=0} + \frac{t^2}{2}\underbrace{w^T H_f(x+\tau w)w}_{>0}, \quad \tau\in[0,t]$$

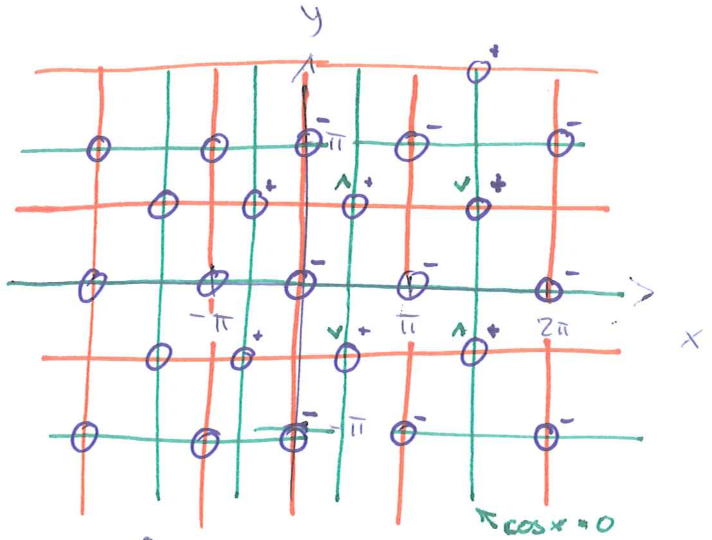
$\square$

Bsp: $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$

$f'(x,y) = [\cos(x)\sin(y), \sin(x)\cos(y)]$

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0 \iff \cos x = 0 \lor \sin y = 0 \iff x = (k+\frac{1}{2})\pi \lor y = k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0 \iff \sin x = 0 \lor \cos y = 0 \iff x = k\pi \lor y = (k+\frac{1}{2})\pi, \ k\in\mathbb{Z}$



$O: \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \land \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

O^+: Extremum

O^-: Sattelpunkt

$\land$: Maximum

$\lor$: Minimum

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{bmatrix}$$

$\det H_f(x,y) = \sin(x)^2\sin(y)^2 - \cos(x)^2\cos(y)^2$

untersuchen an stationären Punkten:

Fall 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \det H_f(x,y) = \underbrace{\sin(x)^2}_{>0}\underbrace{\sin(y)^2}_{>0} > 0$

$\Rightarrow \underbrace{\sin x = 0}_{\text{falsch}} \lor \cos y = 0$

$\Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow \sin y \neq 0$

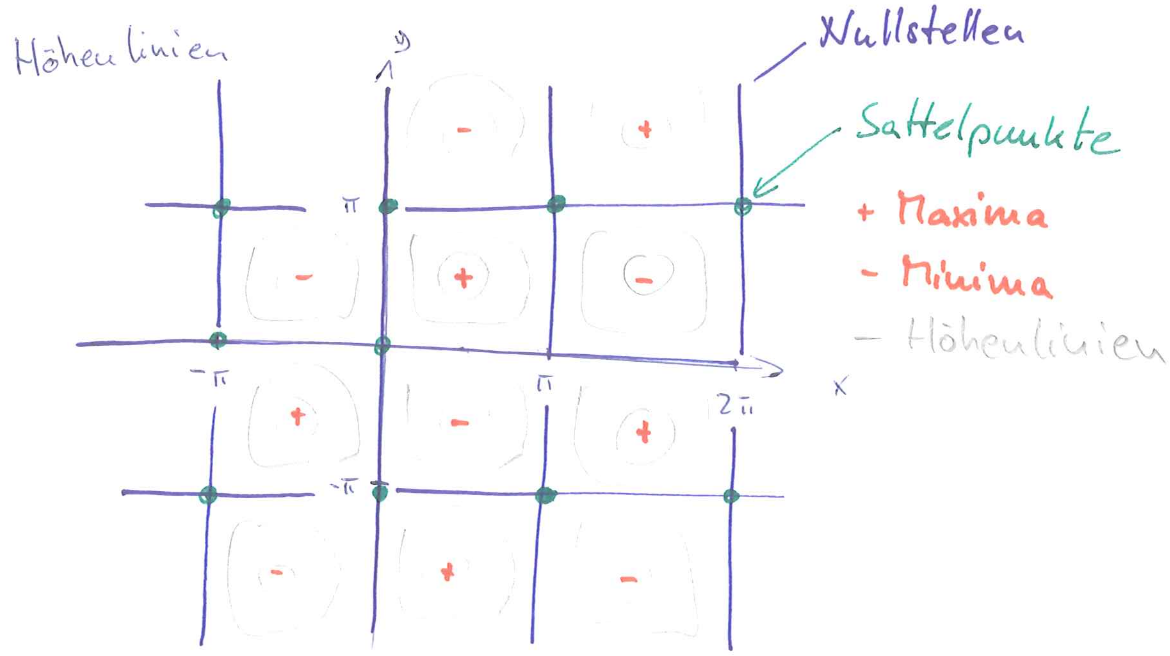
Fall 2: $\sin y = 0 \Rightarrow \det H_f(x,y) = -\underbrace{\cos(x)^2}_{>0}\underbrace{\cos(y)^2}_{>0} < 0$

$\Rightarrow \sin x = 0 \lor \underbrace{\cos y = 0}_{\neq 0}$

$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \cos x \neq 0$

Minimum : $-\sin x \sin y > 0$

Maximum : $-\sin x \sin y < 0$



5.5 Newtonverfahren

Kandidaten für Extrema : Nullstellen des Gradienten $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

numerisch berechnen : $F := \nabla f$ linear approximieren,
Nullstelle der Approximation suchen

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar

$$\Rightarrow F(x+h) \approx F(x) + F'(x)\,h =: g(x+h)$$

$= $ Jacobi-Matrix $J_F(x)$

$= $ totales Differential $D_x F(x)$

Nullstelle $g(x+h) = 0 \iff \boxed{F'(x)\,h = -F(x)}$ h: Newton-Korrektur

Newtonverfahren : $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vorgeben

$F'(x_k)\,\Delta x_k = -F(x_k)$ lösen

$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$

[konvergiert $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$? Gegen eine Nullstelle ?]