Satz 5.5.1 Sei $F: D \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar auf $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F'(x)$ regulär (invertierbar) f.a. $x \in D$. Zu jedem $x_0 \in D$ existiert $c > 0$ abhängig von $\sup_{x \in D} \|F''(x)\|$, $\sup_{x \in D} \|F'(x)^{-1}\|$ und $\inf_{x \in \partial D} \|x_0 - x\|$, so daß gilt:

$$\|F(x_0)\| \le c \;\Rightarrow\; (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \to x^* \in D \text{ mit } F(x^*) = 0$$

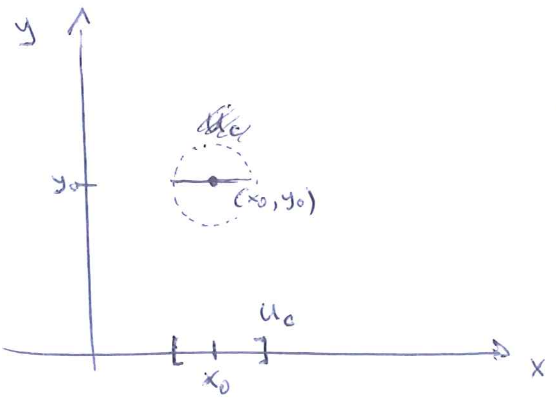
x^* ist die einzige Nullstelle von F in D. Es gilt $\|x^* - x_0\| \le \lambda \cdot \|F(x_0)\|$ mit $\lambda = \lambda(F''(x), F'(x)^{-1})$ sowie $\|x_{k+1} - x^*\| \le \lambda \|x_k - x^*\|^2$.

Bem Satz 5.5.1 liefert insbesondere eine Existenzaussage.

Parametrisierte Gleichungssysteme:

statt $F(y) = 0$ jetzt $F(x; y) = 0$ für gegebene x

wie hängt Nullstelle y^* von x ab? Hat man zu x_0 eine Nullstelle y_0 gefunden, existiert dann auch eine Lösung für x_1, falls $\|x_0 - x_1\|$ klein ist? Existiert $y(x)$, so daß $F(x, y(x)) = 0$ f.a. x?



$F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$F(x_0; y_0) = 0$, F zweimal stetig diff'bar

Umgebung U_c mit $\|F(x; y_0)\| \le c$ f.a. $x \in U_c$

$D_y F(x, y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär

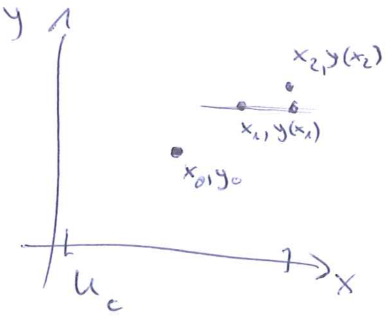
$\Rightarrow$ Newtonverfahren konvergiert gegen Nullstelle $(x, y^*(x))$ f.a. x

$\Rightarrow$ zu $x \in U_c$ existiert $y(x)$ (eindeutig) mit $F(x, y(x)) = 0$

$y(x)$ heißt implizite Funktion.

Stetigkeit: Sind $x_1, x_2 \in U_c$, so gilt $\|F(x_2, y(x_1))\|$

$$\le L \cdot \|x_1 - x_2\|$$



wegen $\|F(x_2, y(x_1))\|$

$$= \|F(x_2,y(x_1)) - F(x_1,y(x_1)) + \underbrace{F(x_1,y(x_1))}_{=0}\|$$

$$\le L \left\| \begin{bmatrix} x_2 \\ y(x_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y(x_1) \end{bmatrix} \right\|$$

stetig diff'bar

Newtonverfahren von $y(x_1)$ gestartet (zu $x = x_2$) konvergiert gegen $y(x_2)$ mit $\|y(x_2) - y(x_1)\| \le \lambda \cdot \|F(x_2, y(x_1))\|$

$$\le L \cdot \lambda \|x_1 - x_2\|$$

$\Rightarrow$ y ist Lipschitz-stetig

Differenzierbarkeit: Annahme: $y(x)$ ist diff'bar.

Dann gilt $\underset{0}{\underset{\|}{D_x F(x, y(x))}} = D_x F(x,y(x)) + D_y F(x,y(x)) \cdot D_x y(x)$

$$\Rightarrow y'(x) = D_x y(x) = -\left[D_y F(x,y(x))\right]^{-1} D_x F(x,y(x))$$

Aber: Ist $y(x)$ tatsächlich diff'bar? Dann müßte gelten

$$\|y(x_1) + y'(x_1)(x_2 - x_1) - y(x_2)\| \le \alpha \|x_1 - x_2\|^2$$

Es ist $y(x_1) + y'(x_1)(x_2 - x_1) = y(x_1) - \left[D_y F(x_1, y(x_1))\right]^{-1} D_x F(x_1, y(x_1))(x_2 - x_1)$

$$= y(x_1) - \left[D_y F(x_1, y(x_1))\right]^{-1} \underbrace{\left[F(x_1, y(x_1)) + D_x F(x_1, y(x_1))(x_2 - x_1)\right]}_{= F(x_2, y(x_1)) + v}$$

mit $\|v\| \le \beta \cdot \|x_2 - x_1\|^2$ nach Taylor

$$= y(x_1) - \left[D_y F(x_1, y(x_1))\right]^{-1} F(x_2, y(x_1)) + v$$

$$= y(x_1) - \left[D_y F(x_2, y(x_1))\right]^{-1} F(x_2, y(x_1)) + \hat{v}$$

mit $\|\hat{v}\| \le \gamma \cdot \|x_2 - x_1\|^2$

Dies ist gerade der erste Newtonschritt!
(Mit Abweichung in Größenordnung $\|x_2 - x_1\|^2$.)
Nach Satz 5.5.1 gilt dann

$$\| \underbrace{y(x_1) + y'(x_1)(x_2 - x_1)}_{\text{Newtoniterierte } y_1 + \text{Fehler } \hat{v}} - y(x_2) \| \le \lambda \| \underbrace{y(x_1)}_{\text{Startwert } y_0} - y(x_2) \|^2 + \|\hat{v}\|$$

$$\le \lambda \cdot L \cdot \lambda \|x_1 - x_2\|^2 + \gamma \|x_1 - x_2\|^2$$

$\Rightarrow$ $y'(x)$ ist tatsächlich totales Differential von y.

Satz 5.5.2 (implizite Funktionen)

Ist $D \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen und $F : D \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar [einmal reicht sogar] sowie $(x_0, y_0) \in D$ mit $F(x_0, y_0) = 0$ und $D_y F(x_0, y_0)$ regulär. Dann gilt

(i) Es existieren offene Umgebungen $U_x(x_0)$ und $U_y(y_0)$ mit $U_x \times U_y \subset D$ sowie eine stetige Funktion $y : U_x \to U_y$ mit

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in U_x.$$

(ii) $y(x)$ ist eindeutig bestimmt, d.h.

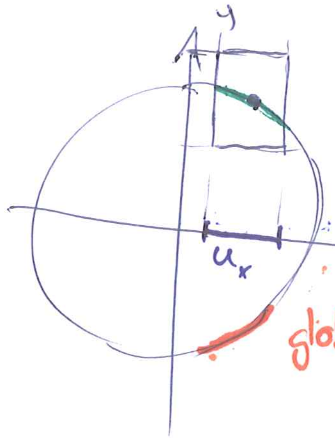
$$x, \eta \in U_x \times U_y \text{ mit } F(x, \eta) = 0 \Rightarrow \eta = y(x).$$

(iii) y ist auf U_x stetig diff'bar mit Ableitung

$$y'(x) = -\left[D_y F(x, y(x))\right]^{-1} D_x F(x, y(x)).$$

Bem y ist lokal eindeutig, i.a. nicht global.

Bsp $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$



$y(x)$ eindeutig in $U_x \times U_y$

global weitere Lösungen

Bsp $\sin^2(x) = \cos(y)$ [welche Kurve beschreibt das?]

1. Nullstelle finden (z.B. raten $\sin = 0 = \cos$ für $\boxed{x=0,\ y=\frac{\pi}{2}}$)
2. Auflösbarkeit testen

   $F(x,y) = \sin(x)^2 - \cos(y)$

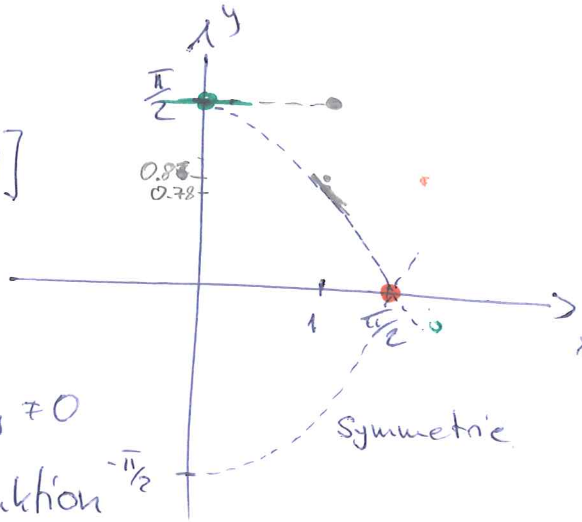
   $F'(x,y) = [\underbrace{2\sin(x)\cos(x)}_{D_x}, \underbrace{\sin(y)}_{D_y}]$

   in $\begin{bmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$: $D_x = 0$

   $D_y = 1$

   $\Rightarrow$ nach y auflösbar wg $D_y \neq 0$

   $y = y(x)$



3. Ableitung der impliziten Funktion

   $y'(x) = -D_y F(x,y)^{-1} D_x F(x,y)$

   $y'(0) = -1^{-1} \cdot 0 = 0$

   $\Rightarrow$ horizontale Tangente

4. weitere Nullstelle: $\sin = 1 = \cos$ für $\boxed{x = \frac{\pi}{2},\ y = 0}$
5. Auflösbarkeit testen

   $F'(\pi/2, 0) = [0, 0] \rightarrow$ Satz nicht anwendbar!

6. 1. festsetzen $x = 1$, $y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F(x,y) = \sin(1)^2 \approx 0.71 \neq 0$

   Newtonverfahren $D_y F \, \Delta y = -F \rightarrow 1 \cdot \Delta y = -0.7 \Rightarrow \Delta y = -0.71 \rightarrow y = 0.86$

   einsetzen $F(1, 0.86) = 0.05$

   Newtonschritt $0.76 \cdot \Delta y = -0.05 \Rightarrow \Delta y = -0.08 \rightarrow y = 0.78$

   einsetzen $F(1, 0.78) = -0.003 \approx 0 \rightarrow y(1) = 0.78$

7. Ableitung

$$y'(x) = -D_y F^{-1} D_x F$$

$$\Rightarrow y'(1) = -0.70^{-1} \cdot 0.91 = 1.3$$

8. In $\begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix}$: $H_F = F'' = \begin{bmatrix} -2\sin x \sin x + 2(\cos x)^2 & \\ & \cos y \end{bmatrix}$

$F' = 0$
kritischer Punkt

$$= \begin{bmatrix} -2 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$ indefinit (Sattelpunkt)

Was Sie verstanden haben sollten

- Taylor-Polynome funktionieren in $\mathbb{R}^n$ genau wie in $\mathbb{R}^1$ (sind aber notationell aufwendig)
- Extrema haben notwendigerweise $f'(x) = 0$ (wie in $\mathbb{R}^1$, hier aber f' Zeilenvektor)
- Entscheidung Minimum/Maximum/Sattelpunkt/weiß nicht anhand der Hesse-Matrix $f''(x)$
- Newtonverfahren konvergiert lokal quadratisch, falls F' invertierbar in Umgebung der Lösung
- Nullstellen von Funktionen $F: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ lassen sich lokal eindeutig und differenzierbar fortsetzen, falls F' maximalen Rang hat.

Was Sie darüberhinaus wissen sollten

- Satz 5.4.5 / 5.4.6
- Newtonkorrektur $\Delta x = -F'(x)^{-1} F(x)$
- Ableitung impl. Funktionen $y'(x) = -D_y F^{-1} D_x F$