1

Ein Kochrezept für Separation der Variablen

1) Prüfe ob DGL der Form

$$y' = f(x)\, g(y) \qquad (*)$$

2) schreibe $(*)$ um zu

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y) \qquad (**)$$

3) Bestimme Nullstellen von $g(y)$ und schließe diese im folgenden aus, also $g(y) \neq \{x_{N_1}, x_{N_2}, \dots\}$

x_{N_i} - Nullstelle i

4) Umformen von $(**)$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx \,, \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + \text{const}$$

nun die letzte erhaltene Gleichung nach y umstellen.

②

Ein Beispiel zur Separation der Variablen

$$\boxed{y' = x \cdot y} \quad (*)$$

1) Prüfe ob

$y' = x \cdot y$ $\qquad f(x) = x \;,\; g(y) = y$

geeignete Struktur hat. ✓

2) umschreiben

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) = x \cdot y$$

3) NST von $g(y)$ bestimmen.

$y \neq 0$

4) Umformen (formal) für $y \neq 0$

$$\frac{dy}{y} = x \cdot dx \quad , \quad \int \frac{dy}{y} = \int x \, dx$$

löse nun diese beiden Integrale

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \, dx \implies \log |y| = \frac{1}{2} x^2 + C'$$

nach y auflösen: $\log |y| = \frac{1}{2} x^2 + C' \iff |y| = e^{\frac{1}{2} x^2 + C'} \iff |y| = e^{C'} \cdot e^{\frac{1}{2} x^2}$

Es ist $e^{c'} > 0$ setze $e^{c'} = \tilde{c}$:

$$|y| = \tilde{c} e^{\frac{1}{2}x^2} \quad , \tilde{c} > 0$$

Fallunterscheidung:

$$y = \tilde{c} e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \text{oder} \quad y = -\tilde{c} e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Vergessene Lösung?

Vorhin hatten wir $y = 0$ ausgeschlossen, ist das vielleicht auch eine Lösung?

Ja, und zwar ist es die Fkt. y die konstant Null ist:

$$y'(x) = 0 = x \cdot y(x) \quad \forall x$$

Allgemeine Lösung bilden:

$$y = c'^* e^{\frac{1}{2}x^2} \quad , c'^* \in \mathbb{R} \qquad (**)$$

ist allgem. Lösung (auch $y = 0$ ist als Lsg. enthalten: $c'^* = 0$ setzen)

Gegenprobe: Setze $(**)$ in $(*)$ ein:

$$y' = c'^* \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} = x \cdot y \quad \checkmark$$

Ein Kochrezept für Variation der Konstanten

A) Prüfe ob DGL der Form

$$y' + a(x)\, y = r(x)$$

Gesamtlösung solch einer DGL ist gegeben durch

$$\boxed{y = y_{inh} + y_h}$$

mit

y_h als Gesamtlösung der homogenen DGL

$$y' + a(x) y = 0$$

y_{inh} eine (spezielle) Lösung der inhomogenen DGL

$$y' + a(x) y = r(x).$$

B) Berechnung von y_h (Möglichkeiten)

1) Raten einer Lösung $y_1 \neq 0$ oder

2) Formel: $y_h = c \cdot e^{-A(x)}$, $A(x) = \int a(x)\, dx$ oder

3) Berechnung einer Lsg. mit Sep. d. Variablen

Stets hat y_h die Form $y_h = c \cdot y_1$, $c \in \mathbb{R}$

C') Berechnung von y_{inh} (Vorgehen)

(1) Raten einer Lösung

(2) Formel $y_{inh} = e^{-A(x)} \cdot \int r(x) e^{A(x)} dx$

(3) Berechnung mittels Variation der Konstanten:

Der Ansatz $y_s(x) = c(x) \cdot y_1$ führt auf

$c' = r(x) e^{A(x)}$ wobei y_1 eine Lösung

d. homogenen DGL ist.

Bsp.: Löse $y' - \frac{y}{x} = 3x$

A) erfüllt Form,

löse nun homogene DGL

B) Drei Lösungsmöglichkeiten

1) Raten: $y = x$ ist Lsg also $y_h = cx \quad c \in \mathbb{R}$

2) Formel: $A(x) = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln|x| \Rightarrow y_h = c e^{\ln|x|} = cx, \; c \in \mathbb{R}$

3) ~~#~~ Sep. d. Variablen:

für $y \neq 0$:

$y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + k$

$\Leftrightarrow |y| = e^k |x| \quad k \in \mathbb{R}$

Mit der Abkürzung $\bar{k} := \pm e^k$ folgt $y = \bar{k}x$, $\bar{k} \neq 0$.

Da $y = 0$ Lösung ist, folgt $y = cx$, $c \in \mathbb{R}$

B) Die inhomogene DGL lautet

$$y' - \frac{y}{x} = 3x$$

drei Lösungsmöglichkeiten

(1) Raten: ? Wüßte ich jetzt hier nicht wie ...

(2) Formel: $y_{inh} = x \int 3x \cdot \frac{1}{x}\, dx = 3x^2$

(3) Ansatz (Variation d. Konstanten)

Setzt man $y_{inh} = c(x)\, x$, $y' = c'(x) \cdot x + c$

in die DGL ein, so fällt c heraus (Rechenkontrolle)

und für $c'(x)$ ergibt sich die DGL $c'(x) = 3$.

Also ist $c(x) = 3x$ und $y_{inh} = 3x^2$

Gesamtlösung:

$Y = y_{ho} + y_{inh}$ ergibt $y = 3x^2 + cx$, $c \in \mathbb{R}$