Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. K. Fackeldey & Dr. M. Weiser

1. Übung zur Vorlesung
ANALYSIS II
SoSe 2012

Abgabe: 19.04.2012

Bitte beachten Sie:

- **Doppelabgabe!**
- Auf jedem Übungszettel müssen Namen und Matrikelnummern **beider** Gruppenmitglieder sowie die Gruppennummer stehen.
- Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.
- Abgabe bis 16 Uhr in den Tutorenfächern Arnimallee 3

1. Aufgabe *Ober- und Untersummen* (4 Punkte)

Gegeben ist $f : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Wir betrachten die Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(0, 1)$ mit äquidistanten Stützstellen und Feinheit $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}_+$.

- Berechnen Sie die Ober- und Untersumme $\overline{S_Z(f)}$ bzw. $\underline{S_Z(f)}$ zur Feinheit $n = 4$.
- Zeigen Sie nun, dass $\overline{S_Z(f)} = \underline{S_Z(f)} + \frac{1}{n}$ gilt. (Hinweis: Benutzen Sie die Summenformeln aus der Analysis I)
- Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_Z(f)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S_Z(f)} = \frac{1}{3}.$$

Setzen Sie geeignete Werte für n ein, die diese Konvergenz gegen $\frac{1}{3}$ veranschaulichen.

2. Aufgabe *Strikte Positivität des Integrals* (4 Punkte)

Zeigen Sie: Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis (zeigen Sie die Kontraposition).