Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. K. Fackeldey & Dr. M. Weiser

10. Übung zur Vorlesung
ANALYSIS II
SoSe 2012

Abgabe: 28.06.2012, 14:00 Tutorenfächer

1. Aufgabe *Taylor* (4 Punkte)

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Grades zur Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y \sin x$ an der Entwicklungsstelle $x = y = 0$.

2. Aufgabe *Extrem!* (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Extrema der folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$

3. Aufgabe *Von Newton zu Banach* (4 Punkte)

Das Newtonverfahren für die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Fixpunktiteration für

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

1. Zeigen Sie, daß g in einer hinreichend kleinen Umgebung einer Nullstelle x^* von f mit $f'(x^*) \neq 0$ eine Kontraktion ist.
2. Sofern die Fixpunktiteration konvergiert, wie hängt dann die Konvergenzgeschwindigkeit von der Umgebungsgröße ab?

Hinweis: Für differenzierbare Funktionen ist der Betrag der Ableitung eine obere Schranke für die Lipschitzkonstante.

4. Aufgabe Implizit (4 Punkte)

Untersuchen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, ob die Gleichung

$$x^y = y^x$$

in der Nähe der Lösungen $(2, 4)$ und (e, e) nach einer der beiden Variablen auflösbar ist. Skizzieren Sie ggf. die implizite Funktion $y(x)$ oder $x(y)$.