Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. K. Fackeldey & Dr. M. Weiser

2. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2012

Abgabe: 26.04.2012

Selbsteinschätzung: Bitte geben Sie zu jeder Aufgabe an, wie viele Punkte Sie Ihrer Meinung nach für die Lösung verdienen!

1. Aufgabe *Monotonie von Ober- und Untersumme* (4 Punkte)
Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und die Zerlegungen und $Z, Z' \in \mathcal{Z}$ derart, dass Z' eine Verfeinerung von Z ist, dann gilt:

$$\overline{S}_{Z'}(f) \leq \overline{S}_Z(f) \text{ und } \underline{S}_{Z'}(f) \geq \underline{S}_Z(f).$$

2. Aufgabe *Integralrelation* (4 Punkte)
Berechnen Sie folgende Integrale:

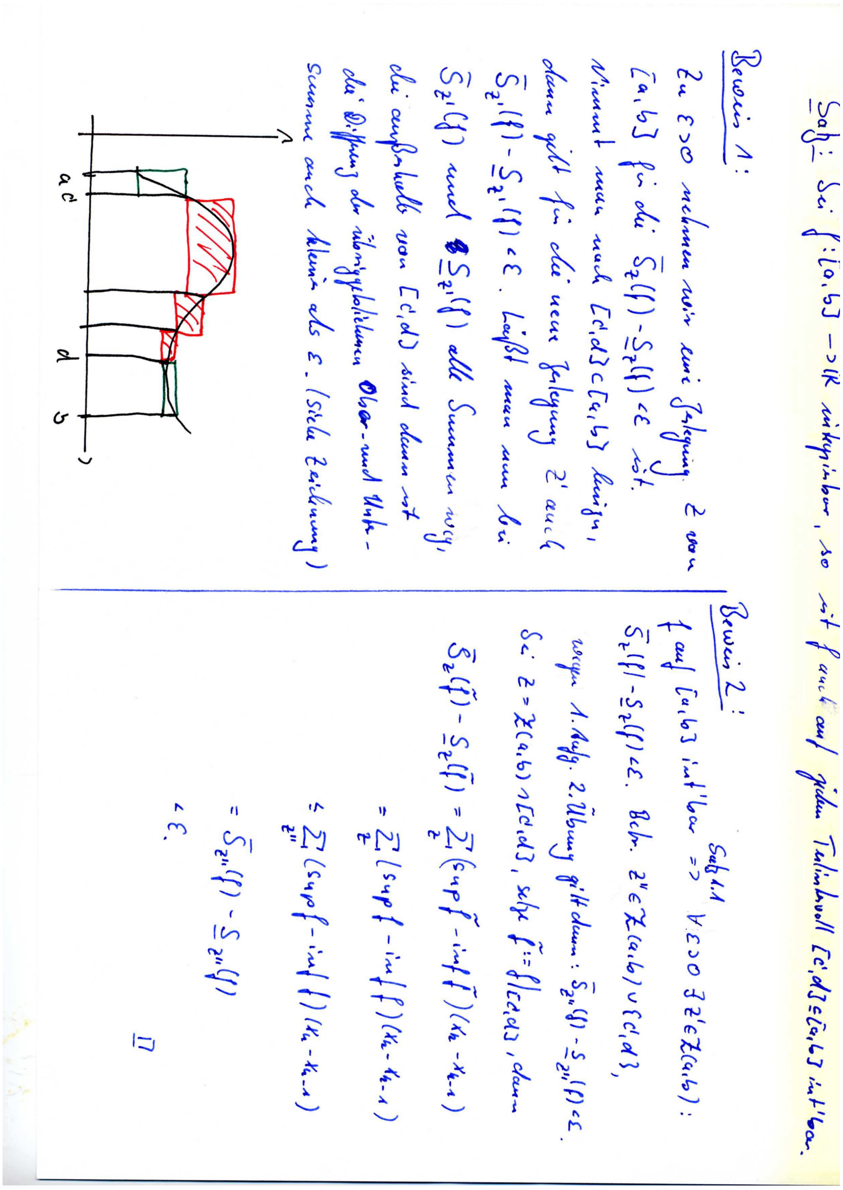
a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^6 f(x)\, dx$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$

Hinweis: Sie dürfen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwenden (Satz 1.7).

3. Aufgabe *Flächeninhalt* (4 Punkte)
Skizzieren Sie die von den Kurven $y = x^2$ und $y = x + 6$ eingeschlossene Fläche und berechnen Sie den Flächeninhalt.

4. Aufgabe *Wie muß ein Beweis aussehen?* (4 Punkte)
Unten finden Sie zwei verschiedene Beweise für einen Satz. Diskutieren Sie kurz beide Beweise im Hinblick auf Verständlichkeit und Präzision. Verfassen Sie einen Beweis, der beiden Kriterien genügt.



Satz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, so ist f auch auf jedem Teilintervall $[c,d]\subseteq[a,b]$ int'bar.

Beweis 1:

Zu $\varepsilon>0$ nehmen wir eine Zerlegung Z von $[a,b]$ für die $\overline{S}_Z(f)-\underline{S}_Z(f)<\varepsilon$ ist. Nimmt man noch $[c,d]\subset[a,b]$ hinzu, dann gilt für die neue Zerlegung Z' auch $\overline{S}_{Z'}(f)-\underline{S}_{Z'}(f)<\varepsilon$. Läßt man nun bei $\overline{S}_{Z'}(f)$ und $\underline{S}_{Z'}(f)$ alle Summen weg, die außerhalb von $[c,d]$ sind dann ist die Differenz der übriggebliebenen Ober- und Untersumme auch kleiner als ε. (siehe Zeichnung)

Beweis 2:

f auf $[a,b]$ int'bar $\overset{\text{Satz 1.1}}{\Rightarrow}$ $\forall\varepsilon>0\ \exists Z'\in\mathcal{Z}(a,b)$: $\overline{S}_Z(f)-\underline{S}_Z(f)<\varepsilon$. Betr. $Z''\in\mathcal{Z}(a,b)\cup\{c,d\}$, wegen 1. Aufg. 2. Übung gilt dann: $\overline{S}_{Z''}(f)-\underline{S}_{Z''}(f)<\varepsilon$. Sei $Z=\mathcal{Z}(a,b)\cap[c,d]$, setze $\tilde{f}:=f|_{[c,d]}$, dann

$$\begin{aligned}\overline{S}_Z(\tilde f)-\underline{S}_Z(\tilde f) &= \sum_Z(\sup\tilde f-\inf\tilde f)(x_k-x_{k-1})\\ &= \sum_Z(\sup f-\inf f)(x_k-x_{k-1})\\ &\leq \sum_{Z''}(\sup f-\inf f)(x_k-x_{k-1})\\ &= \overline{S}_{Z''}(f)-\underline{S}_{Z''}(f)\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$