

Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. K. Fackeldey & Dr. M. Weiser

5. Übung zur Vorlesung
ANALYSIS II
SoSe 2012

Abgabe: 22.05.2012, 14:00 Tutorenfächer

Selbsteinschätzung: Bitte geben Sie zu jeder Aufgabe an, wie viele Punkte Sie Ihrer Meinung nach für die Lösung verdienen!

1. Aufgabe *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = -\epsilon y(t) + \sin(\omega t), \quad y(0) = 0$$

mit $\epsilon, \omega > 0$.

1. Geben Sie eine analytische Lösung an.
2. Diskutieren Sie den Einfluß von großen ϵ und ω auf Auswirkungen von Störungen $y(0) = \delta$ auf die Lösung.

2. Aufgabe *Globale Eigenschaften von DGL* (4 Punkte)

Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von

$$y'(t) = \cos(y(t)), \quad y(0) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

3. Aufgabe *Malen nach Normen* (4 Punkte)

Die Einheitssphäre bzgl. einer Norm $\|\cdot\|$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}.$$

Man skizziere die durch die l_1 -Norm, euklidische Norm und die l_∞ -Norm erzeugten Einheitssphären in $\mathbb{R}^2$.

Desweiteren skizziere man Einheitssphären in $\mathbb{R}^2$ für die folgenden gewichteten Normen, wobei $x = (x_1, x_2)^T$:

- a) gewichtete l_1 -Norm: $\|x\|_{\omega_1} := |x_1| + 2|x_2|$,
- b) gewichtete l_2 -Norm: $\|x\|_{\omega_2} := (|x_1|^2 + 2|x_2|^2)^{1/2}$ (verbessert!),
- c) gewichtete l_∞ -Norm: $\|x\|_{\omega_\infty} := \max(|x_1|, 2|x_2|)$,

4. Aufgabe Bekanntes in höhere Dimensionen übertragen (4 Punkte)

Beweisen Sie den Satz 3.1 (Satz von Cauchy und Satz von Bolzano-Weierstrass) aus den Vorlesungsunterlagen. (*Hinweis: Schauen Sie sich zunächst diese Beweise nochmal in Ihren Analysis I Unterlagen an*)