Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. K. Fackeldey & Dr. M. Weiser

6. Übung zur Vorlesung

# Analysis II

SoSe 2012

**Abgabe: 31.05.2012, 14:00 Tutorenfächer**

*Selbsteinschätzung:* Bitte geben Sie zu jeder Aufgabe an, wie viele Punkte Sie Ihrer Meinung nach für die Lösung verdienen!

**1. Aufgabe** *Nützliche Ungleichungen* (3 Punkte)
Beweisen Sie folgende Ungleichung: Für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 < p, q < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$ gilt:

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

*Hinweis: Nutzen Sie aus, dass die Logarithmusfunktion auf* $\mathbb{R}_+$ *konkav ist, also dass gilt* $\ln(a) + \ln(b) \leq 2\ln((a+b)/2)$ *für* $a, b \in \mathbb{R}_+$.

**2. Aufgabe** *Der Rand einer Menge* (4 Punkte)
Sei $M$ Teilmenge eines metrischen Raums. Zeigen Sie:

a) Der Rand $\partial M$ ist abgeschlossen.

b) Die Menge $M^\circ = M \setminus \partial M$ ist offen. Jede offene Teilmenge $O \subset M$ ist in $M \setminus \partial M$ enthalten.

c) Die Menge $\bar{M} = M \cup \partial M$ ist abgeschlossen. Jede abgeschlossene Menge $A$ mit $M \subset A$ enthält $M \cup \partial M$.

**3. Aufgabe** *Mengen und Durchschnitte* (4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Der Durchschnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

b) Die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

**4. Aufgabe** *Skalarprodukt* (4 Punkte)
Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum, dessen Norm $\|\cdot\|$ folgendes erfüllt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,\ x, y \in V.$$

Zeigen Sie, dass dann durch

$$(x, y) := \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2,\ x, y \in V$$

auf $V$ ein Skalarprodukt definiert wird.