Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. K. Fackeldey & Dr. M. Weiser

7. Übung zur Vorlesung
ANALYSIS II
SoSe 2012

Abgabe: 7.06.2012, 14:00 Tutorenfächer

Selbsteinschätzung: Bitte geben Sie zu jeder Aufgabe an, wie viele Punkte Sie Ihrer Meinung nach für die Lösung verdienen!

1. Aufgabe *Kompaktes Bild* (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie ohne Verwendung offener Überdeckungen, dass $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ ebenfalls kompakt ist.

2. Aufgabe *Stetigkeit* (4 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel an für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die

- a) genau auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ unstetig
- b) stetig auf $\mathbb{R}^2$, aber Lipschitz-stetig nur auf jeder kompakten Teilmenge von $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \neq 1\}$

ist. Weisen Sie nach, dass Ihre Beispiele die geforderten Eigenschaften haben.

3. Aufgabe *Iterierte Funktionensysteme* (4 Punkte)

Es seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei Kontraktionen. Wir definieren induktiv die Funktionenmenge $\mathcal{F}$ durch

- a) $\{f_1, f_2\} \subset \mathcal{F}$
- b) $f \in \mathcal{F} \Rightarrow \{f_1 \circ f, f_2 \circ f\} \subset \mathcal{F}$

Zeigen Sie

1. Jedes $f \in \mathcal{F}$ hat genau einen Fixpunkt x_f .
2. Es sei $X := \{x_f | f \in \mathcal{F}\}$. Dann gilt $f_1(X) \cup f_2(X) \subset \overline{X}$.
Hinweis: Betrachten Sie x_f und $x_{f_1 \circ f^n}$ für $n \rightarrow \infty$ und setzen Sie voraus, daß X beschränkt ist.

Bonus (2 Punkte): Die Konstruktion läßt sich direkt auf mehr als zwei Kontraktionen erweitern. Skizzieren Sie X für

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \begin{bmatrix} 0.85 & 0.037 \\ -0.037 & 0.85 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.074 \\ 0.182 \end{bmatrix} \\
 f_2(x) &= \begin{bmatrix} 0.197 & -0.226 \\ 0.226 & 0.197 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.049 \end{bmatrix} \\
 f_3(x) &= \begin{bmatrix} -0.15 & 0.283 \\ 0.26 & 0.237 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.575 \\ -0.044 \end{bmatrix} \\
 f_4(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.159 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4. Aufgabe Projektaufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten den Zusammenhang der Sätze 3.4 (i)/(ii) und Lemma 3.3 aus der Vorlesung:

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen und beschränkt, wenn jede Folge von Punkten in M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M enthält.

und:

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Punkten in A ebenfalls in A liegt.

Diskutieren Sie in einem ein- bis zweiseitigen Miniaufsatz den Unterschied der beiden Sätze. Warum benötigt der eine Satz noch die Beschränktheit, warum der andere nicht? Was für unterschiedliche Arten von Folgen werden hier betrachtet? Impliziert ein Satz den anderen? Können Sie Beispiele nennen, bei denen die eine Aussage zutrifft und die andere nicht?