Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. K. Fackeldey & Dr. M. Weiser

8. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2012

Abgabe: 14.06.2012, 14:00 Tutorenfächer

Selbsteinschätzung: Bitte geben Sie zu jeder Aufgabe an, wie viele Punkte Sie Ihrer Meinung nach für die Lösung verdienen!

1. Aufgabe Projektaufgabe (4 Punkte)
Formulieren Sie eine Klausuraufgabe für eine hypothetische Analysis II-Klausur zum Thema *Differenzierbarkeit von Funktionen auf* $\mathbb{R}^2$. Die Bearbeitungszeit für die Aufgabe sollte etwa eine Viertelstunde sein. Geben Sie eine Musterlösung sowie ein Bewertungsschema an und stellen Sie dar, welche Kenntnisse und Kompetenzen durch diese Aufgabe geprüft werden.

2. Aufgabe *...Rechnen, Rechnen, Rechnen...* (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ der folgenden Funktionen:

   i) $f(x) = r(x)^{-n}\, x \neq 0$
   ii) $f(x) = e^{-1/r(x)^2}\, x \neq 0$
   iii) $f(x) = x_1^4 \sin(x_1 x_2^3)$

   Dabei ist $r(x) = \|x\| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$.

b) Die Diagonale d eines Rechteckes sei gegeben durch $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ mit x und y als Seitenlängen. Finden Sie die Änderungsrate von d bezüglich x, wenn man x variiert und y fest bleibt.

3. Aufgabe *...von einer in n Dimensionen...* (4 Punkte)
Gegeben ist Satz 1 (Analysis I) mit Beweis (s.u.). Übertragen Sie Satz und Beweis auf Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n > 1$.

Satz (Analysis I)

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a,b]$ stetige Funktion
Sei $x_0 \in [a,b]$ und $f(x_0) > 0$, dann ex. $\delta > 0$
s.d. $f(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Bw.:
Wir führen einen Widerspruchsbeweis.
Angenommen es gäbe nicht ein solches $\delta > 0$, dann gibt es in jedem δ-Intervall $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ein x mit $f(x) \leq 0$. Insbesondere gäbe es dann in jedem Intervall $[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]$ ein x_n mit $f(x_n) < 0$.
Offensichtlich strebt $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$. Dementsprechend ex. $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$. Dieser Grenzwert wäre jedoch ≤ 0 und somit $\neq f(x_n)$, was ~~ein~~ Widerspruch zur Stetigkeitsannahme der Funktion steht.

4. Aufgabe *Student rechnet Gradient* (4 Punkte)
Berechnen Sie den Grandienten und die Hessematrix der folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

a) $f(x) = (\|x\|_2^2 + \epsilon)^{-1}$ für $\epsilon > 0$

b) $g(x) = e^{\|x\|_2^2}$