Übungen zu den Themen Gewöhnliche Differentialgleichungen & Implizite Funktionen

1. Der Regler eines Warmwasserspeichers wählt die Heizleistung proportional zur Differenz zwischen Zieltemperatur und momentaner Wassertemperatur. Darüberhinaus treten Wärmeverluste proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Wasser und Umgebung auf. Beschreiben Sie den Temperaturverlauf durch eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Der Wasserspeicher fasst 100l Wasser. Die Zieltemperatur sind 60°C . Die Wärmeverluste sind 1W/K , die Heizleistung 10W/K . Zu Beginn ($t = 0$) ist die Wassertemperatur 10°C , die Umgebungstemperatur ist konstant 20°C . Nach welcher Zeit hat das Wasser Duschtemperatur (35°C) erreicht?

Musterlösung: Sei $y(t)$ die Temperatur. Die spezifische Wärmekapazität von Wasser ist 10^3J/kg/K , die Dichte 110^3kg/m^3 , somit ist die Wärmekapazität des Speichers mit 0.1m^3 gerade $c = 10^5\text{J/K}$. Der Wärmezufuß beläuft sich auf $q = 10\text{W/K}(60 - y)\text{K} - 1\text{W/K}(y - 20)\text{K} = (620 - 11y)\text{J/s}$. Der Temperaturanstieg je Sekunde ist also $\dot{y}\text{K/s} = q/c = 10^{-5}(620 - 11y)\text{K/s}$, oder ohne Einheiten:

$$\dot{y} = 10^{-5}(620 - 11)y.$$

Mit $b = 620 \cdot 10^{-5}$ und $a = -11 \cdot 10^{-5}$ ist die Lösung nach Variation der Konstanten durch

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{at} \left(\int_{\tau=0}^t e^{-a\tau} b d\tau + 20 \right) \\ &= e^{at} (-b[e^{-a\tau}/a]_0^t + 20) \\ &= -b/a(1 - e^{at}) + 20e^{at} \end{aligned}$$

gegeben, also $y(t) = 56.4(1 - e^{-11 \cdot 10^{-5}t}) + 20e^{-11 \cdot 10^{-5}t}$. Auflösen von $y(t) = 35$ nach t führt auf $t = 4229\text{s}$. Nach einer Stunde und 20 Minuten ist das Wasser warm genug.

2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = \sin(t)y(t)^2, \quad y(0) = \frac{1}{a}$$

für $a > 2$. Was geschieht für $0 < a \leq 2$?

Musterlösung: Nach Trennung der Variablen gilt

$$\int_{z=1/a}^{y(t)} \frac{1}{z^2} dz = \int_{\tau=0}^t \sin(\tau) d\tau = 1 - \cos t.$$

Für das erste Integral erhalten wir den Wert

$$[-z^{-1}]_{1/a}^{y(t)} = a - \frac{1}{y(t)}.$$

Auflösen nach $y(t)$ liefert dann für $a > 2$ die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{a - 1 + \cos t}.$$

Für $a < 2$ hat die Lösung eine Singularität nach endlicher Zeit.

3. Es sei $F(x, y) = x^2 - y$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob in den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ die Gleichung nach x bzw. y auflösbar ist. Berechnen Sie dort ggf. die Ableitungen der impliziten Funktion. Skizzieren Sie daraus den Verlauf der Nullstellenkurve. Versuchen Sie, die Gleichung symbolisch zu lösen und vergleichen Sie Ihre implizite Funktion mit dem symbolischen Resultat.

Musterlösung: Die Ableitung ist $F'(x, y) = [2x, -1]$. In den beiden Punkten also $F'(0, 0) = [0, -1]$ und $F'(1, 1) = [2, -1]$. Im ersten Punkt ist nur $D_y F \neq 0$, daher ist die Gleichung dort nur nach y auflösbar. Dort gilt $y'(x) = -D_y F^{-1} D_x F = -0/(-1) = 0$, also hat die Kurve eine horizontale Tangente. Im zweiten Punkt verschwindet keine der beiden Ableitungen, daher kann die Gleichung dort sowohl nach x als auch nach y aufgelöst werden. Wir erhalten $x'(y) = -D_x F^{-1} D_y F = -(-1)/2 = 1/2$ bzw. $y'(x) = -D_y F^{-1} D_x F = -2/(-1) = 2$.

Symbolisch auflösen läßt sich die Gleichung als $y = x^2$, die Kurve ist also eine einfache Parabel. Die Ableitungen $y'(x)$ stimmen in den beiden Punkten offenbar überein.

4. Es sei $G(x, y) = (x^2 - y)^3$. Untersuchen Sie, ob in den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ die Gleichung nach x bzw. y auflösbar ist.

Musterlösung: Offenbar gilt $G(x, y) = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = 0$. Nach Kettenregel gilt $G'(x, y) = 3F(x, y)^2 F'(x, y)$. In Nullstellen von G ist daher $G'(x, y) = 0$ und die Gleichung läßt sich nicht auflösen. Natürlich ist die Nullstellenkurve die gleiche wie bei F – eine einfache Parabel. Das Kriterium $D_y G$ invertierbar ist daher nur hinreichend, nicht aber notwendig.

5. Es sei $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ gegeben. Untersuchen Sie die Auflösbarkeit der Gleichung in den Punkten $(0, 0, 0)$ und $(1, 0, 1)$. Machen Sie sich klar, wie Sie die Variable aufteilen können. Bestimmen Sie ggf. die Ableitungen. Welche Fläche wird durch die Gleichung beschrieben?

Musterlösung: Es ist $F(x, y, z) = 2[x, y, -z]$. Im ersten Punkt verschwindet die Ableitung, die Gleichung ist dort nach keiner Variablen aufzulösen. Im zweiten Punkt gilt $F(1, 0, 1) = 2[1, 0, -1]$, so daß die Gleichung nach x oder z aufgelöst werden kann. Wir erhalten jeweils

$$x'(y, z) = -D_x F^{-1} [D_y F, D_z F] = -(1/2)[0, -2] = [0, 1]$$

und

$$z'(x, y) = -D_z F^{-1} [D_x F, D_y F] = -1/(-2)[2, 0] = [1, 0]$$

. Anschaulich wird das ganze, wenn man sich klar macht, daß die durch $F = 0$ gegebene Fläche ein Doppelkegel um die z -Achse ist und die Ableitungen $x'(y, z)$ und $z'(x, y)$ gerade die Tangentialebenen beschreiben.

6. Es sei

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x + y + z - 1 \end{bmatrix}.$$

Untersuchen Sie die Auflösbarkeit der Gleichung im Punkt $(1, 0, 0)$. Welches Objekt ist die Nullstellenmenge?

Musterlösung: Es ist

$$F'(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Im angegebenen Punkt gilt daher

$$F'(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Um eine invertierbare Teil-Jacobimatrix zu erhalten müssen wir notwendigerweise die erste Spalte verwenden und können diese mit der zweiten oder dritten kombinieren. Somit ist die Gleichung nach $(x, y) = (x, y)(z)$ oder nach $(x, z) = (x, z)(y)$ auflösbar.

Die erste Zeile von F beschreibt die Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$, die zweite eine (schräge) Ebene. Punkte, die beide Gleichungen erfüllen, bilden genau die Schnittmenge von Kugel und Ebene – das ist ein Kreis.