Übungen zu den Themen Gewöhnliche Differentialgleichungen & Implizite Funktionen

1. Der Regler eines Warmwasserspeichers wählt die Heizleistung proportional zur Differenz zwischen Zieltemperatur und momentaner Wassertemperatur. Darüberhinaus treten Wärmeverluste proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Wasser und Umgebung auf. Beschreiben Sie den Temperaturverlauf durch eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Der Wasserspeicher fasst 100l Wasser. Die Zieltemperatur sind $60^\circ C$. Die Wärmeverluste sind $1W/K$, die Heizleistung $10W/K$. Zu Beginn ($t = 0$) ist die Wassertemperatur $10^\circ C$, die Umgebungstemperatur ist konstant $20^\circ C$. Nach welcher Zeit hat das Wasser Duschtemperatur ($35^\circ C$) erreicht?

2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = \sin(t)y(t)^2, \quad y(0) = \frac{1}{a}$$

für $a > 2$. Was geschieht für $0 < a \leq 2$?

3. Es sei $F(x, y) = x^2 - y$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob in den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ die Gleichung nach x bzw. y auflösbar ist. Berechnen Sie dort ggf. die Ableitungen der impliziten Funktion. Skizzieren Sie daraus den Verlauf der Nullstellenkurve. Versuchen Sie, die Gleichung symbolisch zu lösen und vergleichen Sie Ihre implizite Funktion mit dem symbolischen Resultat.
4. Es sei $G(x, y) = (x^2 - y)^3$. Untersuchen Sie, ob in den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ die Gleichung nach x bzw. y auflösbar ist.
5. Es sei $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ gegeben. Untersuchen Sie die Auflösbarkeit der Gleichung in den Punkten $(0, 0, 0)$ und $(1, 0, 1)$. Machen Sie sich klar, wie Sie die Variable aufteilen können. Bestimmen Sie ggf. die Ableitungen. Welche Fläche wird durch die Gleichung beschrieben?
6. Es sei

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x + y + z - 1 \end{bmatrix}.$$

Untersuchen Sie die Auflösbarkeit der Gleichung im Punkt $(1, 0, 0)$. Welches Objekt ist die Nullstellenmenge?