

Vorlesungsmitschriften, <http://www.zib.de/weiser/>

Sprechstunde: Di 14-16, MA 676

1 Lineare Algebra

Algebra: von arab. al-ğabr (das Ergänzen / Einsetzen)

(Teil einer) Methode zur Lösung von Gleichungen

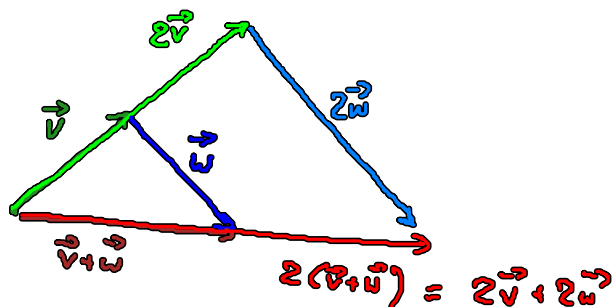
~ 825 n. Chr.

Teilgebiet der Mathematik: Lösung von Gleichungen,
Strukturen von „Rechenoperationen“

linear: $a(v+w) = av + aw$

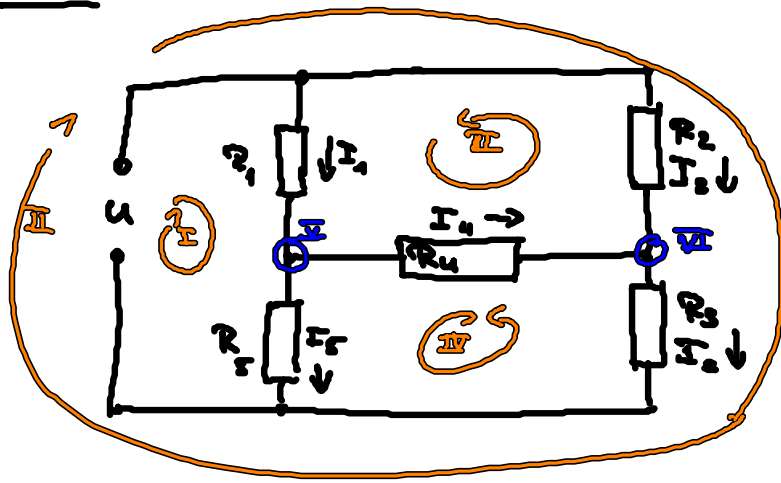
- große Bedeutung wg. enorm vielfältiger Anwendungen
in Mathematik, Natur- und Sozialwissenschaften, Technik, ...
- lingua franca der Mathematik

Anschauung: Geometrie



Beispiele

1.2.1 Ströme in der Wheatstone-Brücke



Ohmsches Gesetz $U = R \cdot I$

Kirchhoffsche Gesetze

- Knotenregel:
- Maschenregel

$$\begin{array}{rcll}
 R_1 I_1 & & + R_5 I_5 & = U & \text{I} \\
 R_2 I_2 + R_3 I_3 & & & = U & \text{II} \\
 R_1 I_1 - R_2 I_2 & + R_4 I_4 & & = 0 & \text{III} \\
 & - R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5 & & = 0 & \text{IV} \\
 I_1 & & - I_4 - I_5 & = 0 & \text{V} \\
 & I_2 - I_3 + I_4 & & = 0 & \text{VI}
 \end{array}$$

Gegeben: R_1, \dots, R_5, U

Gesucht: Stromstärken I_1, \dots, I_5

lineares Gleichungssystem \rightarrow Lineare Algebra

Bsp Audiokompression

CD: Abtastung 44 kHz, 16 bit, Stereo \rightarrow 160 kBs

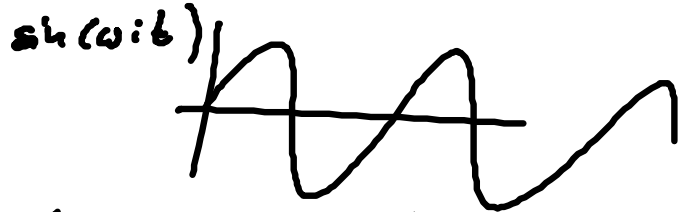
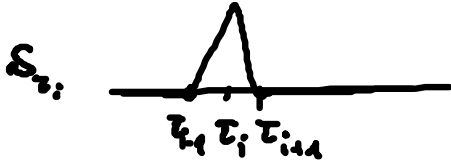


Darstellung als Überlagerung von reinen Tönen

$$f = \sum_{i=1}^N a_i \sin(\omega_i t)$$

Darstellung als Samples in der Zeit

$$f = \sum_{i=1}^N a_i \delta_{t_i}$$



(Fourieranalyse)

Musikgenuss auch bei Speicherung von $n \ll N$ Koeffizienten

Basiswechsel
→ lineare Algebra

Komplexe Zahlen

Aufbau des Zahlensystems

(i) natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(ii) ganze Zahlen

Lösung von Gleichungen: $3 + x = 1$
 $x \notin \mathbb{N}!$

Wir postulieren die Existenz einer Lösung (-2)

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

(iii) rationale Zahlen

Lösung von Gleichungen $3 \cdot x = 1$ $x \notin \mathbb{Z}$

Wir postulieren die Existenz einer Lösung ($\frac{1}{3}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

(iv) algebraische Zahlen

Lösung von Gleichungen $x^2 = 2$

$x \notin \mathbb{Q}$

Wir postulieren die Existenz von Lösungen ($\sqrt{2}$)

(v) reelle Zahlen

Grenzwertbildung $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, a_n \in \mathbb{Q}$

Wir postulieren die Existenz von Grenzwerten: \mathbb{R}

(vi) komplexe Zahlen

Lösung von Gleichungen: $x^2 = -1, x \in \mathbb{R}$

Wir postulieren die Existenz von Lösungen

$i := \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit \mathbb{C}

Rechnen mit komplexen Zahlen

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1$$

Multiplizieren mit reellen Zahlen: $zi, bi, \pi i$

$$a, b \in \mathbb{R}: a \cdot (bi) = (ab)i$$

Addition zu reellen Zahlen:

$$a, b \in \mathbb{R}: z = a + bi \in \mathbb{C}$$

Realteil

Imaginärteil

Addition komplexer Zahlen:

$$(a+bi) + (c+di) = a+c + (b+d)i$$

Multiplikation:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + cbi + bdi^2$$

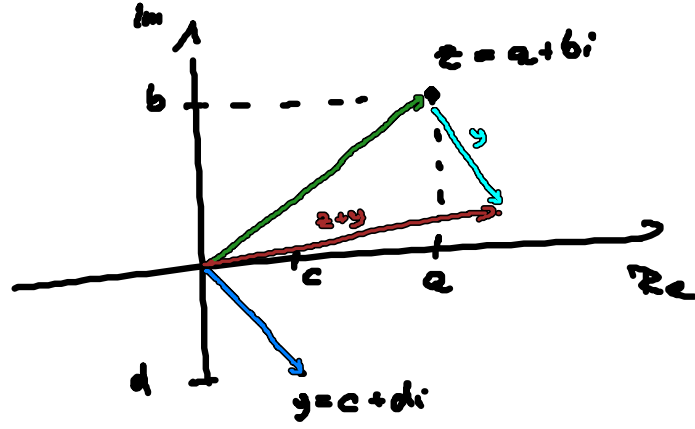
$$= ac - bd + (ad+cb)i$$

Konjugation $z = a+bi$

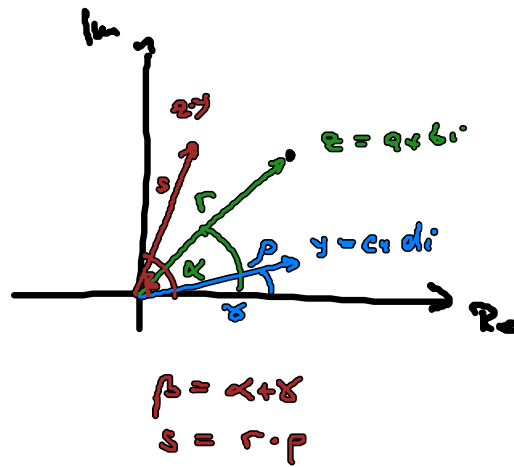
$$\bar{z} := a - bi$$

Darstellung: Zahlenebene

Addition



Multiplication



$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$