

Adaptive Runge-Kutta-Verfahren

Startwert y_0

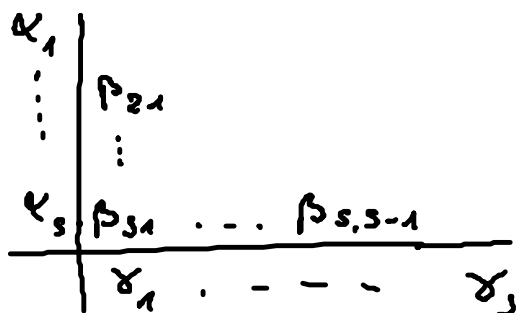
Schrittweite h

gesucht: Approximation an $y(h)$

$$y \text{ erfüllt } y' = f(t, y)$$

$$\text{Stufenwerte } k_i := f\left(\alpha_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\right), \quad i=1, \dots, s$$

$$y(h) \approx y_1 := y_0 + \sum_{i=1}^s \gamma_i k_i$$



Bsp: Euler-Verfahren



Ordnungsbedingungen

$$\frac{y_1 - y(h)}{h} = O(h) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^s \gamma_i = 1$$

$$\mathbb{1} \cdot \gamma = 1$$

$$= O(h^2) \Leftrightarrow \alpha_i = \sum_{k=1}^s \beta_{ik} \kappa_k$$

$$\beta \mathbb{1} = \kappa$$

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i \delta_i = 1/2$$

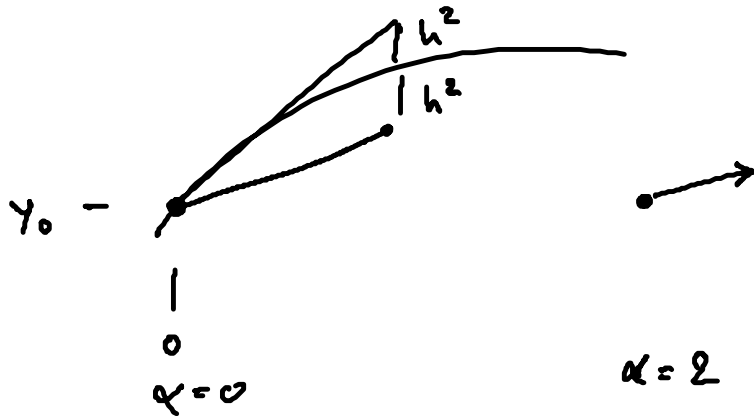
$$\alpha \cdot \delta = 1/2$$

$$= O(h^3) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^s \alpha_i^2 \delta_i = 1/3$$

$$\alpha^2 \cdot \delta = 1/3$$

$$\sum_{i=1}^s \delta_i \sum_{k=1}^s \beta_{ik} \kappa_k = 1/6$$

$$\delta^T \beta \alpha = 1/6$$



lokale Fehlerschätzung

$\epsilon = \|y(h) - y_1\| \approx \|\hat{y}_1 - y_1\|$ mit einem weiteren RK-Verfahren
höherer Ordnung $(p+1)$

Aufwand ist gut verdoppelt!

Recycling der Stufenwerte k_i :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} = \alpha \\ \hat{\beta} = \beta \\ \hat{\delta} \neq \delta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{keine zusätzlichen} \\ \text{Auswertungen von } f! \\ \text{(eingebettete} \\ \text{Verfahren)} \end{array}$$

adaptive Integration (ein Schritt)

do

for $i=1, \dots, s$

$$k_i := f(x_i, h, y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j)$$

$$y_{n+1} := \sum \gamma_i k_i$$

$$\hat{y}_{n+1} := \sum \hat{\gamma}_i k_i$$

$$\varepsilon := \|\gamma_i - \hat{\gamma}_i\|$$

$$h := \sqrt[p+1]{\frac{\rho \cdot \text{TOL}}{\varepsilon}} \cdot h, \quad \rho < 1$$

Ziel $\varepsilon = \text{TOL}$

$$\varepsilon(h) = c \cdot h^{p+1}$$

$$\varepsilon(h_{\text{opt}}) \approx c \cdot h_{\text{opt}}^{p+1} = \text{TOL}$$

$$\Rightarrow h_{\text{opt}} = \sqrt[p+1]{\frac{\text{TOL}}{c}} \cdot h$$

until $\varepsilon \leq \text{TOL}$

$$y := \hat{y}_{n+1}$$

also gleich: \hat{y} Ordnung $p-1$

y Ordnung p

Konstruktion eingebetteter Verfahren

Heun:

0	
1	1
<hr/>	
	1/2 1/2
<hr/>	
1	0

$$y_1 = y_0 + h \left(\frac{1}{2} f(y_0) + \frac{1}{2} f(y_0 + h f(y_0)) \right)$$

← expl. Euler eingebettet

klassisches Runge-Kutta-Verf. $p=4$

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 1/2 & 1/2 & & & \\
 1/2 & 0 & 1/2 & & \\
 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \\
 \hline
 & \hat{\delta}_1 & \hat{\delta}_2 & \hat{\delta}_3 & \hat{\delta}_4
 \end{array}$$

einzusetzendes
Verfahren mit
 $p=3$

Bedingungsgleichungen für $p=3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \hat{\delta}_3 \\ \hat{\delta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Matrix ist regulär
 \Rightarrow ex. eindeutige
 Lösung
 $\left[\begin{array}{cccc} 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array} \right]$

einzusetzendes Verfahren mit $p=2$ führt
 zu ineffizienter Schrittweitenwahl!

Ausweg: eine weitere Stufe

Nachteil: mehr Aufwand....

es sei denn, man kann die
 zusätzliche Stufe recyceln!

Fehlberg-Trick

$$k_s = f(h, y_1)$$

wird ohnehin im
 nächsten Schritt
 gebraucht!

(FSAL - Eigenschaft
 first same as last)

Erweiterung des Butcher-
 Schemas:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 0 & & & & & \\
 1/2 & 1/2 & & & & \\
 1/2 & 0 & 1/2 & & & \\
 1 & 0 & 0 & 1 & & \\
 1 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & \\
 \hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 0 \\
 \hline
 & \hat{\delta}_1 & \hat{\delta}_2 & \hat{\delta}_3 & \hat{\delta}_4 & \hat{\delta}_5
 \end{array}$$

Ordnungsbedingungen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\delta}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} \quad \text{hat Kern} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

also Lösungen

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 + \delta & 0 - \delta \end{bmatrix}$$

$$\text{zB } \delta = -1/6 \quad \hat{\delta} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Welche Ordnung? $p=3$ oder $p=4$ kommen in Frage

Approximation der Exponentialfunktion (Übung 8.3(b))

$$R(h) = 1 + \textcircled{h} \alpha^T (I - h\beta)^{-1} \mathbb{1}$$

- fehlt auf Übungsblatt!

$$= 1 + h + 1/2 h^2 + 1/6 h^3 + \textcircled{\frac{1}{36}} h^4 + \frac{1}{144} h^5$$

\Rightarrow eingebettete Verfahren hat Ordnung 3

- falsch: bei Exp-Fkt ist es $1/24$

Extrapolationsverfahren

explizites Euler-Verf. $y_{(n+1)h} = y_{nh} + h f(y_{nh})$

Es gilt die asymptotische Entwicklung in h [nicht h^2]

$$\|y(h) - y_{n \frac{h}{n}}\| = \sum_{k=2}^m \sigma_k \left(\frac{h}{n}\right)^k + O\left(\left(\frac{h}{n}\right)^{m+1}\right)$$

Also Extrapolation mit Folge $n_{i+1} > n_i$ gegen $\frac{h}{n_i} \rightarrow 0$

$$y_{n_1 \frac{h}{n_1}} = y_{n_1} \rightarrow$$

\vdots

\vdots

$$y_{n_m \frac{h}{n_m}} = y_{n_m} \rightarrow y_{n_m}$$

$$\Rightarrow \frac{\|y(h) - y_{n_m}\|}{h} = O(h^m) \text{ falls } f \text{ stetig}$$

Wahl der Folge n_i :

- Romberg $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

- harmonisch $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Extrapolationstabelleau (Polynominterpolation Aitken / Neville)

$$y_{ik} = y_{i, k-1} + \frac{y_{i, k-1} - y_{i-1, k-1}}{\frac{n_i}{n_{i-k+1}} - 1}$$

Extrapolationsverfahren sind Runge-Kutta-Verfahren

BSP: $y_{11} = y_0 + h f(y_0)$ $\frac{0}{1}$ Ordnung 1
Euler

$$y_{21} = y_0 + \frac{h}{2} f(y_0) + \frac{h}{2} f\left(y_0 + \frac{h}{2} f(y_0)\right)$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 \quad 1/2 \end{array}$$

Ordnung 1

$$y_{22} = y_{21} + \frac{y_{21} - y_{11}}{\frac{2}{1} - 1} = 2y_{21} - y_{11}$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1/2 & 1/2 \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array}$$

Ordnung 2
mod. Euler

$$y_{31} = y_0 + \frac{h}{3} f(y_0) + \frac{h}{3} f\left(y_0 + \frac{h}{3} f(y_0)\right) + \frac{h}{3} f(\dots)$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 1/3 & 1/3 & \\ \hline 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}$$

$$y_{32} = y_{31} + \frac{y_{31} - y_{21}}{\frac{3}{2} - 1} = 3y_{31} - 2y_{21}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & & \\ \hline 1/3 & 1/3 & 0 & \\ \hline 2/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ \hline 3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ -2 & 1/2 & 1/2 & & \\ \hline = & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$y_{33} = y_{32} + \frac{y_{32} - y_{22}}{\frac{3}{1} - 1} = \frac{3}{2} y_{32} - \frac{1}{2} y_{22}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & & \\ \hline 1/3 & 1/3 & 0 & \\ \hline 2/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ \hline 3/2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

