

# Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = Ax - b = 0$$

$$\text{Newtonverfahren: } F'(x) \Delta x = -F(x)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

$$\text{Newtonkorrektur } A \Delta x = -(Ax - b)$$

$$\text{inexaktes Newtonverfahren } M \delta x = -F(x), \quad M \approx F'(x)$$

$$x_{k+1} = x_k + \delta x_k$$

$$\Rightarrow F'(x_k) \delta x_k = -F(x_k) + r_k$$

einfache Wahl von  $M$ :

- $\nabla$  obere Dreiecksmatrix von  $F'(x) = A$
- $\setminus$  Diagonale von  $A$
- ...

Umsetzung:

$$x_{k+1} = x_k + \delta x_k$$

$$= x_k + M^{-1}(b - Ax_k)$$

$$\Rightarrow Mx_{k+1} = Mx_k + b - Ax_k$$

$$= \underbrace{(M - A)}_{=: N} x_k + b$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$$

Konvergenz:  $\frac{\|r_k\|}{\|F(x_k)\|} \leq \text{TOL}$

$$\|F(x + \delta x)\| \leq \left( \text{TOL} + \frac{\beta \delta^2 (1 + \text{TOL})^2}{2} \|F(x)\| \right) \|F(x)\|$$

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq \beta \|x - y\| \quad \text{hier: } \beta = 0 \text{ weil } F' \text{ konstant}$$

$$\Rightarrow \|F(x + \delta x)\| \leq \text{TOL} \|F(x)\|: \text{TOL} < 1 \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

$$\text{TOL} \leq \max \frac{\|r\|}{\|F(x)\|}$$

$$= \max \frac{\|F'(x) \delta x + F(x)\|}{\|F(x)\|}$$

$$= \max_{F \in \mathbb{R}^n} \frac{\| -A \Pi^{-1} F + F \|}{\|F\|}$$

$$= \max_F \frac{\| (I - A \Pi^{-1}) F \|}{\|F\|}$$

$$\leq \|I - A \Pi^{-1}\|$$

$$= \underbrace{\|(N - A) \Pi^{-1}\|}_{=: N} < 1$$

Konvergenz, falls  $\|N \Pi^{-1}\| < 1$ .

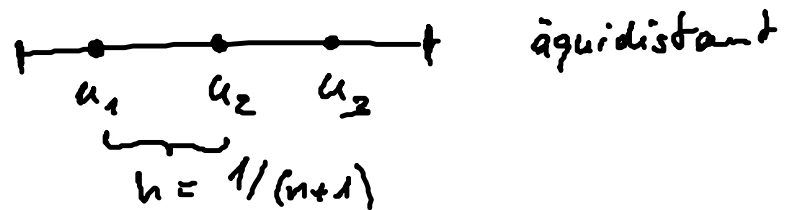
↗  
Aussage gilt für alle induzierte Normen: wähle Norm  $\|\cdot\|$ , so daß  $\|N \Pi^{-1}\|$  minimal!

→ Konvergenz, falls  $\rho(N \Pi^{-1}) < 1$ .

$$\rho(N \Pi^{-1}) = \rho(\Pi^{-1} N \Pi^{-1} \Pi) = \rho(\Pi^{-1} N)$$

Bsp: Randwertproblem  $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u(0) = u(1) = 0$   
 $\in u''(x) + \delta \cdot u'(x) = f(x)$

Diskretisierung:  $u_i = u(i/n), i = 1, \dots, n$



$$u'(i/n) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$u''(i/n) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Einsetzen für  $x = i/n, i = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\epsilon}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{\delta}{h} (u_{i+1} - u_i) = f_i, i = 1, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\epsilon}{h^2} - \frac{\delta}{h} & \frac{\epsilon}{h^2} + \frac{\delta}{h} & & & \\ & \frac{\epsilon}{h^2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{\epsilon}{h^2} + \frac{\delta}{h} & \\ & & & & \frac{\epsilon}{h^2} - \frac{\delta}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Konvergenzgeschwindigkeit:

$$x_{k+1} - x_* = M^{-1} N x_k + M^{-1} b - x_*$$

$$\begin{aligned}
&= \Pi^{-1} N x_k + \Pi^{-1} A x_* - x_* \\
&= \Pi^{-1} N x_k + \Pi^{-1} (A x_* - \Pi x_*) \\
&= \Pi^{-1} (N x_k + \underbrace{(A - \Pi) x_*}_N) \\
&= \Pi^{-1} N (x_k - x_*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_*\| &\leq \rho(\Pi^{-1} N) \|x_k - x_*\| \\
&\leq \underbrace{\rho(\Pi^{-1} N)}_{< 1} \|x_0 - x_*\|
\end{aligned}$$

Seien  $\varphi_i$  Eigenvektoren von  $\Pi^{-1} N$  zu Eigenwerten  $\lambda_i$

und  $x_0 - x_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$

$$\Rightarrow x_k - x_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \varphi_i$$